

TRABAJO FIN DE GRADO



Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LA POROSIDAD EN LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HUESO TRABECULAR

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

AUTOR: Eduardo García Barea

TUTOR: Miguel Marco Esteban

Junio 2015





AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, gracias a mis padres por todo el esfuerzo y sacrificio que han realizado para que haya podido llegar a este punto en el que me encuentro.

A mi hermana, por haberme acompañado durante todos estos años, así como a Cristina, por haberme apoyado siempre en mis decisiones.

Por último, gracias a mi tutor, Miguel, por todo el tiempo que me ha dedicado y por ayudarme a sacar adelante este proyecto.



RESUMEN

En los huesos que constituyen el esqueleto humano, se encuentran fundamentalmente dos tipos de tejidos: tejido óseo cortical, conocido como hueso cortical, y tejido óseo trabecular, conocido como hueso trabecular. Aunque ambos estén formados por los mismos tipos de células, y presenten composiciones similares, es en la estructura interna en la que se aprecian sus diferencias.

Mientras que en el hueso cortical el tejido óseo aparece de forma compacta, en el hueso trabecular este tejido se agrupa de forma irregular formando capas, denominadas trabéculas, de forma que entre ellas aparecen oquedades que confieren a esta estructura la apariencia típica de esponja.

El hueso trabecular presenta, por tanto, una densidad mucho menor que la que tiene el hueso cortical, debido a la mayor porosidad, y ésta es clave para determinar el comportamiento mecánico de este tipo de estructura. Sin embargo, esto no es algo sencillo, pues la porosidad puede ser distinta para cada hueso, y puede aumentar o disminuir como consecuencia de distintos desórdenes metabólicos.

Mediante la ejecución de un script escrito en lenguaje de programación Python, se han generado modelos aleatorios en Abaqus/CAE, herramienta informática de diseño y análisis por el Método de los Elementos Finitos, que representan volúmenes elementales representativos (RVE's por su siglas en inglés) de la estructura del hueso trabecular. Estos RVE's permitirán estudiar el comportamiento con la porosidad de las principales constantes elásticas de la estructura, considerándose ésta como elástica, lineal e isotrópica.

Se ha estudiado un rango de porosidad que abarca desde el 0 % hasta el 55 %, en incrementos del 5 %, y se ha observado como aumentan o disminuyen los valores del Módulo de elasticidad (E), Módulo de cizalla (G) y Coeficiente de Poisson.

Mientras que el Módulo de elasticidad (E) y el Módulo de cizalla (G) disminuyen con la porosidad, desde 13 GPa (0 %) hasta 2,5 GPa (55 %) el primero, y desde 1,8 GPa (0 %) hasta 0,4 GPa (55 %) el segundo, ambos presentando una línea de tendencia polinómica de segundo grado, el Coeficiente de Poisson aumenta, desde 0,3 (0 %) hasta 0,35 (55 %), con una línea de tendencia recta.

ABSTRACT

Two main types of tissues can be found in the skeletal bones: cortical bone tissue, known as cortical bone, and trabecular bone tissue, known as trabecular bone. Although both of them are composed by the same type of cells and have similar compositions, their internal structure is different.

Whereas in the cortical bone the bone tissue appears compactly arranged; in the trabecular bone the bone tissue is grouped irregularly forming layers known as trabeculae. This arrangement causes the apparition of hollows which give the structure this typical spongy appearance.

The trabecular bone therefore has less density than the cortical bone, due to a larger porosity. This is the key to determine the mechanical behaviour of this type of structure. However, this is not easy because of the variation in the porosity of each bone and the increase or decrease of the porosity due to different metabolic disorders.

Through the implementation of a script written in Python programming language, random models have been generated in Abaqus/CAE, a software tool of design and FEM analysis. These models represent RVEs of the trabecular bone structure, which let us study the behaviour of the main elastic constants of the structure with the porosity. We will consider an elastic, lineal and isotropic structure.

A range of porosity that goes from 0 % to 55 % with increases of 5 % has been studied, and the increase or decrease of the Elastic modulus (E), Shear modulus (G) and Poisson's ratio have been watched.

Whereas the Elastic modulus and the Shear modulus decrease with the porosity, from 13 GPa (0 %) to 2.5 GPa (55 %) the first one, and from 1.8 GPa (0 %) to 0.4 GPa (55 %) the second one, both having a second degree polynomial trend line; the Poisson's ratio increases from 0.3 (0 %) to 0.35 (55 %) with a straight trend line.



ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	1
1.1. Introducción.	2
1.2. Objetivos.	3
CAPÍTULO 2. EL HUESO HUMANO	4
2.1. Clasificación.	6
2.2. Estructura.	8
2.3. Hueso cortical.	17
2.4. Hueso trabecular.	18
2.4. Osteoporosis.	20
CAPÍTULO 3. GENERACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO	22
3.1. El método de los elementos finitos y Abaqus.	24
3.1.1. El método de los elementos finitos.	24
3.1.2. Abaqus.	25
3.2. Python.	27
3.2.1. Introducción.	27
3.2.2. Generación de un script en Python.	27
3.3. Volumen Elemental Representativo.	29
3.4. Modelado de la estructura trabecular.	32
3.5. Análisis de la sensibilidad.	41
3.5.1. Sensibilidad respecto a la malla.	41
3.5.2. Sensibilidad respecto al tamaño del RVE.	44
CAPÍTULO 4. PROBLEMA A RESOLVER	46
CAPÍTULO 5. RESULTADOS	56
5.1. Módulo de elasticidad (E).	57
5.2. Módulo de cizalla (G).	59
5.3. Coeficiente de Poisson (ν).	61
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	62
6.1. Conclusiones.	63
6.2. Trabajos futuros.	64
CAPÍTULO 7. PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO	65
7.1. Planificación.	66
7.2. Presupuesto.	68
CAPÍTULO 8. BIBLIOGRAFÍA	69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Ejemplo de hueso largo. Fémur. [2]	6
Figura 2 Ejemplo de hueso corto. Vértebra. [2]	6
Figura 3 Ejemplo de hueso plano. Omóplato. [2]	7
Figura 4 Ejemplo de hueso irregular. Maxilar superior. [2]	7
Figura 5 Muestra de tejido vegetal (izquierda) y muestra de tejido animal (derecha) en la que pueden diferenciarse las células (morado) de la matriz (blanco). [3]	8
Figura 6 Muestra de tejido epitelial de revestimiento. [3]	9
Figura 7 Muestra de tejido epitelial glandular. [3]	9
Figura 8 Ilustraciones de los tres tipos de tejido muscular. [2]	10
Figura 9 Muestra de tejido nervioso. Pueden apreciarse las neuronas, envueltas en células de glía con forma estrellada. [3]	11
Figura 10 Muestra de tejido conjuntivo laxo. Se pueden apreciar las fibras de elastina. [3]	11
Figura 11 Muestra de tejido conjuntivo denso. [3]	12
Figura 12 Muestra de tejido conjuntivo elástico. Se aprecia la gran abundancia de fibras de elastina. [3]	12
Figura 13 Muestra de tejido conjuntivo reticular. Pueden observarse las fibras de reticulina, que aportan unión a la estructura. [3]	13
Figura 14 Muestra de tejido adiposo. [3]	13
Figura 15 Muestra de tejido cartilaginoso. [3]	14
Figura 16 Ilustración del tejido sanguíneo circulando por el interior de un capilar. [2]	14
Figura 17 Muestra de tejido óseo cortical (izquierda) y tejido óseo trabecular (derecha). [4] ..	15
Figura 18 Estructura interna de un hueso largo. [5]	16
Figura 19 Estructura interna de hueso corto y plano. [2]	16
Figura 20 Estructura del tejido óseo cortical. [7]	17
Figura 21 Muestra de tejido óseo cortical. [3]	17
Figura 22 Estructura del tejido óseo trabecular. [7]	18
Figura 23 Estructura interna de las trabéculas. [3]	19
Figura 24 Muestra de hueso normal (izquierda) y hueso con osteoporosis (derecha). Puede apreciarse el incremento de la porosidad. [9]	20
Figura 25 Fractura vertebral típica producida por osteoporosis. [11]	20
Figura 26 Tipos de osteoporosis. [12]	21
Figura 27 Método de los Elementos Finitos aplicado mediante ABAQUS/CAE a un panel tipo sándwich	24

Figura 28 Productos de Abaqus FEA empleados en cada fase del análisis por medio de elementos finitos.	26
Figura 29 Funcionamiento de Abaqus/CAE. [20].....	28
Figura 30 Ventana de inicio de Abaqus/CAE.	28
Figura 31 RVE generado en Abaqus/CAE.....	29
Figura 32 Vista al microscopio de la estructura trabecular de distintos huesos humanos, realizadas sobre muestras de distintos pacientes. (a) Muestra de vértebra lumbar de un paciente de entre 40 y 60 años. (b) Muestra de vértebra lumbar de un hombre entre 54 y 90 años. (c) Muestra de fémur distal. [25]	31
Figura 33 Cubo generado en Abaqus/CAE.	33
Figura 34 Esfera generada en Abaqus/CAE.....	33
Figura 35 RVE empleado en el proyecto.	35
Figura 36 Empotramiento aplicado sobre el RVE empleado en el proyecto.	37
Figura 37 Desplazamiento aplicado sobre la cara superior del RVE empleado en el proyecto. 37	
Figura 38 Restricción de desplazamiento aplicada sobre la cara inferior del RVE empleado en el proyecto.	38
Figura 39 C3D4. Elemento Finito tetraédrico lineal con sus 4 nodos.....	39
Figura 40 C3D10. Elemento Finito tetraédrico cuadrático con 10 nodos.	39
Figura 41 Vista del mallado del RVE empleado en este proyecto, utilizando un tamaño de malla de 0,2 mm.	43
Figura 42 Gráfica que muestra la variación del tiempo de simulación empleado en el análisis del modelo, frente al tamaño de malla definido.	44
Figura 43 Gráfica que muestra la variación del Módulo de elasticidad del modelo frente al tamaño del lado del RVE.	45
Figura 44 Ventana generada automáticamente en Abaqus/CAE para introducir la porosidad deseada en el modelo.....	47
Figura 45 Empotramiento aplicado sobre el RVE empleado en el proyecto.	48
Figura 46 Desplazamiento aplicado sobre la cara superior del RVE empleado en el proyecto. 49	
Figura 47 Restricción de desplazamiento aplicada sobre la cara inferior del RVE empleado en el proyecto.	50
Figura 48 Ensayo empleado para obtener el Módulo de cizalla (G).	52
Figura 49 Aviso de error en el mallado generado por Abaqus/CAE.....	55
Figura 50 Gráfica que muestra la variación del Módulo de elasticidad (E), del RVE empleado en el proyecto para representar la estructura trabecular, en función de la porosidad de la misma.	57
Figura 51 Tensión de Von Mises en un modelo empleado para obtener E, con el 50 % de porosidad.	58

Figura 52 Deformación máxima principal en un modelo empleado para obtener E, con el 50 % de porosidad.	58
Figura 53 Desplazamiento en un modelo empleado para obtener E, con el 50 % de porosidad.	58
Figura 54 Gráfica que muestra la variación del Módulo de cizalla (G), del RVE empleado en el proyecto para representar la estructura trabecular, en función de la porosidad de la misma.	59
Figura 55 Tensión de Von Mises en un modelo empleado para obtener G, con el 50 % de porosidad.	60
Figura 56 Deformación máxima principal en un modelo empleado para obtener G, con el 50 % de porosidad.	60
Figura 57 Desplazamiento en un modelo empleado para obtener G, con el 50 % de porosidad.	60
Figura 58 Gráfica que muestra la variación del Coeficiente de Poisson (ν), del RVE empleado en el proyecto para representar la estructura trabecular, en función de la porosidad de la misma.	61



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Módulo de elasticidad obtenido con distintos tamaños de malla, para un mismo modelo.....	42
Tabla 2 Tiempo empleado por el programa para realizar el análisis en cada caso estudiado en el análisis de sensibilidad.....	43
Tabla 3 Propiedades del material óseo que constituye las trabéculas. [26, 27].....	47



CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. Introducción.

A lo largo de las últimas décadas, con el desarrollo de ordenadores cada vez más potentes, que permiten resolver cada vez problemas más complejos en menor tiempo, se han estandarizado los programas informáticos de diseño y análisis empleando el Método de los Elementos Finitos para estudiar el comportamiento de todo tipo de estructuras.

Sin duda, uno de los campos de mayor de interés actualmente, donde se aplican este tipo de herramientas, es aquel ligado al estudio del comportamiento mecánico de materiales compuestos, ya que los métodos clásicos implican un número de ecuaciones muy elevado para resolverlo.

Ya desde la década de 1980, con la generalización del ordenador personal, y con el creciente desarrollo de nuevos materiales compuestos, para atender las demandas de distintos sectores en constante evolución, como el de la automoción o la aeronáutica, empiezan a aparecer artículos donde se realizan estos estudios.

Sin embargo, no es hasta los últimos años, cuando los investigadores han comenzado a darse cuenta del potencial de estas herramientas para estudiar el comportamiento de materiales aplicados al campo de la biomedicina, bien sea analizar los distintos tejidos que forman el cuerpo humano o investigar en prótesis que puedan ser implantadas dentro del mismo.

Concretamente, en nuestra Universidad, a lo largo de los últimos años se han destinado recursos y esfuerzos para la investigación del comportamiento mecánico de distintos huesos humanos, de cara a poder diseñar prótesis que cada vez se asemejen más a ellos y se adapten mejor a las necesidades de los pacientes que las demandan.

1.2. Objetivos.

Con el fin de poder aportar un pequeño grano de arena al conocimiento universal sobre el comportamiento mecánico de los huesos que componen el esqueleto humano, en el presente trabajo, se ha analizado como influye una de las características más notables del tejido óseo trabecular, la porosidad, en el comportamiento mecánico del mismo.

Aunque ese sea el objetivo fundamental, sin embargo, puede descomponerse el trabajo que se va a realizar en tres grandes puntos que definen distintas sub-metas que se pretenden alcanzar durante la elaboración del proyecto o que se desprenderán de los resultados obtenidos en el mismo.

- Se creará un script escrito en lenguaje de programación Python, que permita generar un modelo paramétrico, en el que el usuario pueda determinar la porosidad del mismo, y de manera totalmente automática, de un RVE para la estructura ósea trabecular. Dicho modelo se generará en Abaqus/CAE, herramienta informática destinada al diseño y análisis de elementos empleando el Método de los Elementos Finitos.
- Se estudiará el comportamiento mecánico de los modelos generados, para distinta porosidad, utilizando el mismo programa informático. Al hablar de comportamiento mecánico, sin duda, vienen en mente tres características fundamentales, en un material, que lo definen: Módulo de elasticidad (E), Módulo de cizalla (G) y Coeficiente de Poisson (ν). Estudiando estos tres parámetros, el hueso trabecular quedará bien definido.
- El tejido óseo trabecular, junto con el tejido óseo cortical, forma los huesos del esqueleto humano. Al igual que ocurre con otros tejidos humanos la degeneración de los mismos con la edad, o la aparición de enfermedades, como la osteoporosis, obliga a que se deban realizar este tipo de estudios para intentar mejorar la calidad de vida de los pacientes.

Es la osteoporosis, sin duda, el principal motivo para realizar este trabajo, siendo la enfermedad ósea más importante en nuestros días, por su gravedad y por el número de personas a las que afecta, y consistente en una pérdida de densidad ósea, principalmente en el tejido óseo trabecular. Por ello, se espera que este proyecto pueda ser útil en la investigación de este desorden, al permitir predecir el comportamiento mecánico en huesos que están perdiendo densidad ósea, y por tanto, si se conoce la tasa de pérdida anual, permita a los médicos estimar cuándo deba ser recomendable sustituir un determinado hueso por una prótesis.



CAPÍTULO 2 EL HUESO HUMANO

Para poder entender correctamente qué es el objeto de estudio de este trabajo, el hueso trabecular, así como conocer sus propiedades y características, este apartado es fundamental.

Se empezará por definir y clasificar los distintos tipos de huesos presentes en el cuerpo humano y, posteriormente, se analizará su estructura interna, lo que permitirá un conocimiento avanzado de los distintos tejidos que componen los huesos, y llevará a poder identificar en éstos el tejido óseo trabecular o hueso trabecular.

Una vez localizado, se profundizará en el estudio del hueso trabecular, observando su estructura, así como los distintos tipos de células que lo forman y las funciones que realizan dentro del mismo.

Por último, debido a la importancia que puede tener este trabajo en su estudio, se presentará el concepto de osteoporosis, el desorden metabólico óseo más frecuente en el mundo, indagando en sus causas, grupos de población que la padecen y consecuencias de la misma.

2.1. Clasificación.

La palabra hueso designa a aquel tejido rígido y resistente que compone el endoesqueleto de los vertebrados [1].

En el cuerpo humano se encuentran 206 huesos distintos, que típicamente se clasifican en función de su geometría en:

- **Huesos largos.** Presentan una forma cilíndrica, predominando su longitud sobre su ancho y grosor. Son huesos típicos de los miembros locomotores, ya que son rígidos y densos para otorgar movilidad y resistencia.

Estos huesos presentan dos extremos (epífisis), a través de los cuales se unen con otras estructuras óseas, y un cuerpo llamado diáfisis. La zona de unión entre ambas se conoce como metáfisis.



Figura 1 Ejemplo de hueso largo. Fémur. [2]

- **Huesos cortos.** Tienen forma de cuboide, no predominando ninguna de sus dimensiones, y su principal función es la de amortiguamiento, ubicándose en aquellas zonas del cuerpo que llevan a cabo movimientos de gran esfuerzo y poca extensión.

Forman parte de este grupo las vértebras (aunque algunos autores las consideren irregulares), así como los huesos carpianos y tarsianos, situados en las manos y los pies respectivamente.



Figura 2 Ejemplo de hueso corto. Vértebra. [2]

- **Huesos Planos.** Destacan por su anchura y longitud, más allá que por su grosor. Esta clase de estructuras óseas forman grandes cavidades con el propósito de proteger a órganos frágiles. Ejemplos de estos son los huesos de la caja torácica o el omóplato.



Figura 3 Ejemplo de hueso plano. Omóplato. [2]

- **Huesos Irregulares.** Pertenecen a este grupo aquellos huesos que por su geometría no pueden ser clasificados en ninguno de los anteriores. El maxilar superior es un ejemplo de este tipo de huesos.



Figura 4 Ejemplo de hueso irregular. Maxilar superior. [2]

2.2. Estructura.

Para poder profundizar en la estructura de los huesos, será necesario introducir el concepto de tejido. Para ello, se empleará material bibliográfico típico del ámbito de la histología, que es aquella disciplina que estudia todo lo relacionado con los tejidos orgánicos [2, 3].

Un tejido es un conjunto de células que, en un organismo, poseen la misma función y diferenciación morfológica y constituyen la estructura fundamental de los diferentes órganos.

Típicamente, se distingue entre tejidos vegetales, formados por células eucariotas de tipo vegetal, y tejidos animales, que son un conjunto de células eucariotas de tipo animal unidas entre sí y con matriz intercelular entre ellas, compuesta ésta última de agua, sales minerales y proteínas.

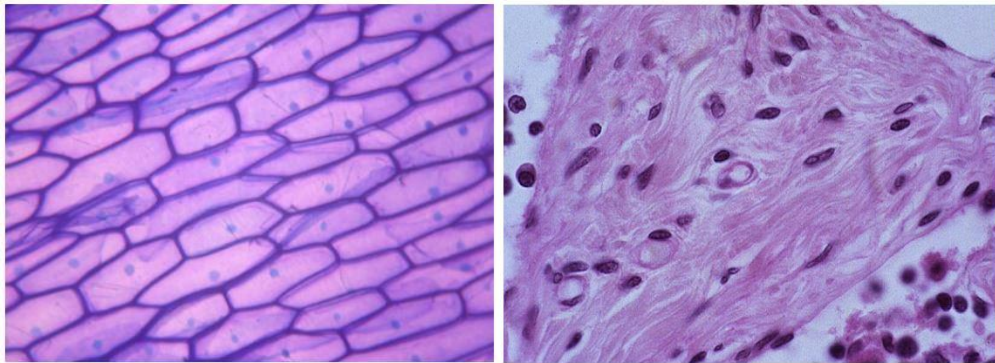


Figura 5 Muestra de tejido vegetal (izquierda) y muestra de tejido animal (derecha) en la que pueden diferenciarse las células (morado) de la matriz (blanco). [3]

Por ser los que están presentes en el cuerpo humano, se centrará la atención en los tejidos animales, existiendo cuatro tipos de tejidos fundamentales en este grupo:

- **Tejido epitelial.** Formado por una o varias capas de células yuxtapuestas, unidas fuertemente entre sí, y con muy poca matriz intercelular.

De forma general, se puede clasificar en:

- **Tejido epitelial de revestimiento.** Constituye la piel, así como el recubrimiento interno de las cavidades, órganos huecos y conductos del cuerpo.

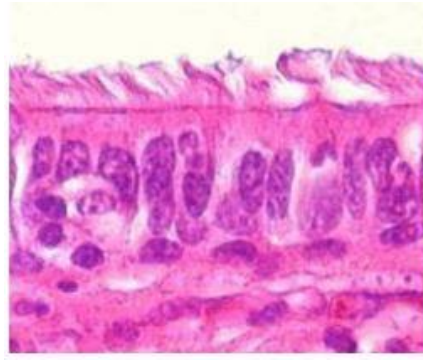


Figura 6 Muestra de tejido epitelial de revestimiento. [3]

- **Tejido epitelial glandular.** Se forman a partir del tejido epitelial de revestimiento por un proceso que se conoce como invaginación.

Las células que forman este tejido se han especializado en la secreción y forman las mucosas y las glándulas.

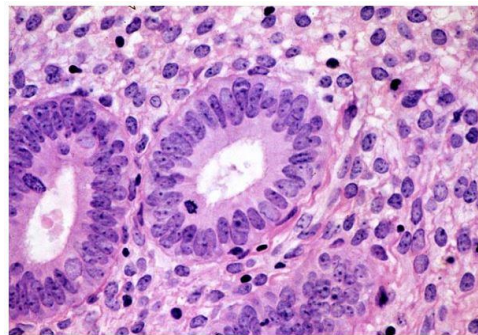


Figura 7 Muestra de tejido epitelial glandular. [3]

- **Tejido muscular.** Está formado por células, denominadas fibras musculares o miocitos, capaces de contraerse, al recibir las órdenes de células nerviosas, relajándose posteriormente. Este proceso da lugar al movimiento.

Existen tres tipos de tejido muscular:

- **Tejido muscular liso.** Formado por células alargadas y que presentan un solo núcleo, mononucleadas, este tejido se encuentra en la pared de los conductos internos (vasos sanguíneos, tubo digestivo...) y sus contracciones son lentas e involuntarias, estando controladas por el Sistema nervioso autónomo o vegetativo.
- **Tejido muscular estriado.** Sus células son muy largas y multinucleadas, y al contrario que en el caso anterior, sus contracciones son rápidas y voluntarias, ya que están gobernadas por el Sistema nervioso central.

Este tejido se localiza en los músculos unidos a los huesos, y su función principal es dotar de movimiento al esqueleto.

- **Tejido muscular cardíaco.** Formado por células cortas, ramificadas y mononucleadas. Sus contracciones son rápidas, involuntarias, pues están controladas por el Sistema nervioso autónomo.

Para poder apreciar con claridad la diferencia entre los tres, a continuación se mostrarán unas pequeñas ilustraciones de los mismos.

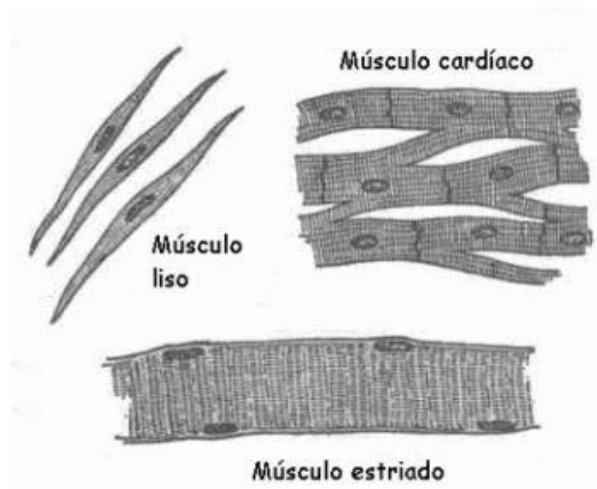


Figura 8 Ilustraciones de los tres tipos de tejido muscular. [2]

- **Tejido nervioso.** Está formado por dos tipos de células, neuronas y células de la glía, y está especializado en captar los estímulos del medio, elaborar una respuesta ante los mismos y conducirla a los órganos efectores.

Son las neuronas las encargadas de realizar el trabajo descrito, mientras que las células de glía se encargan de proporcionarles protección y soporte, así como de facilitarles los nutrientes que necesitan.

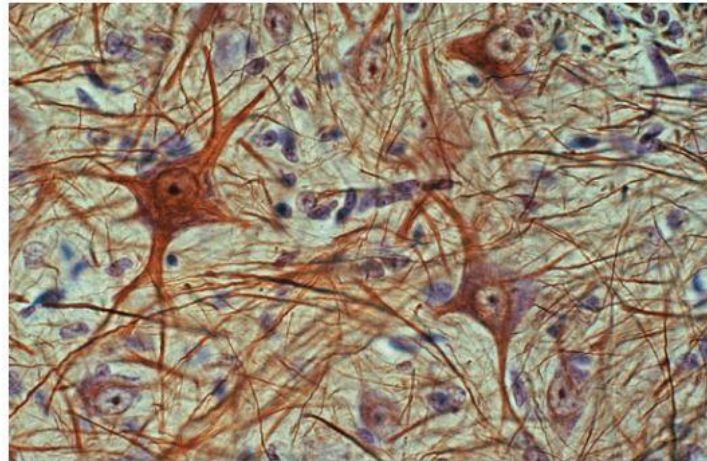


Figura 9 Muestra de tejido nervioso. Pueden apreciarse las neuronas, envueltas en células de glía con forma estrellada. [3]

- **Tejido conectivo.** Dentro de este grupo, el más abundante entre los animales, se encuentran una serie de tejidos cuyas funciones principales son, por un lado, actuar de relleno, ocupando los espacios entre los órganos y otros tejidos, y proporcionar sostén al organismo, constituyendo el soporte material del cuerpo.

Los tejidos que se agrupan son:

- **Tejido conjuntivo.** Está compuesto por una matriz intercelular de consistencia gelatinosa, y fibras, que dependiendo del tipo y cantidad de las mismas, hacen que el tejido pueda subdividirse en:
 - **Tejido conjuntivo laxo.** Es el más abundante y forma la dermis. Presenta pocas fibras, en su mayoría de elastina, lo que le proporciona flexibilidad, y abunda la matriz intercelular.

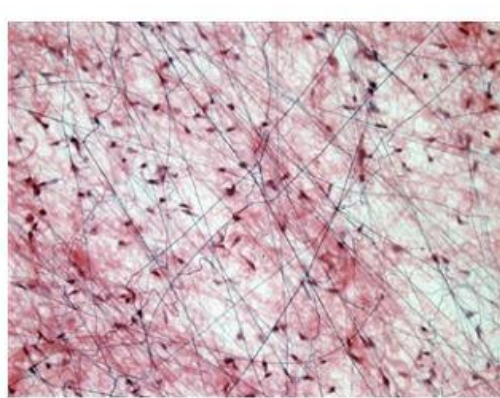


Figura 10 Muestra de tejido conjuntivo laxo. Se pueden apreciar las fibras de elastina. [3]

- **Tejido conjuntivo fibroso.** Constituye los tendones y ligamentos. Predominan las fibras de colágeno, que proporcionan gran resistencia a la tracción, y se encuentran menos células y matriz.

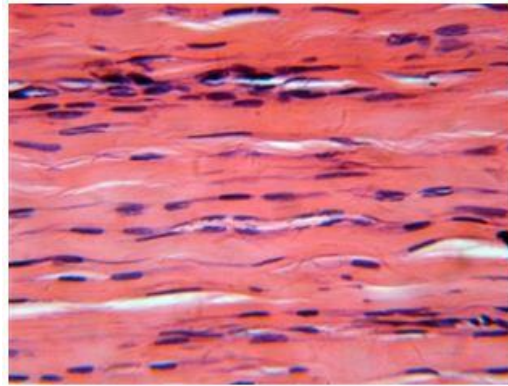


Figura 11 Muestra de tejido conjuntivo denso. [3]

- **Tejido conjuntivo elástico.** Forma los vasos sanguíneos. Al igual que en la dermis, aparecen fibras de elastina, pero en una proporción bastante mayor, lo que proporciona a los vasos sanguíneos gran flexibilidad.

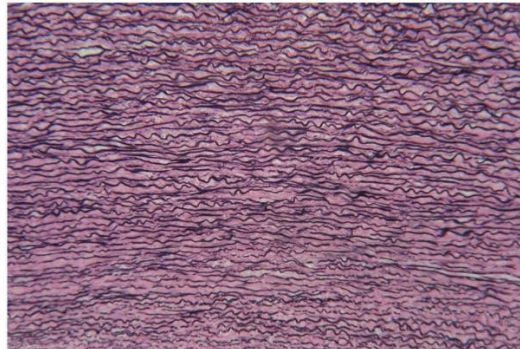


Figura 12 Muestra de tejido conjuntivo elástico. Se aprecia la gran abundancia de fibras de elastina. [3]

- **Tejido conjuntivo reticular.** Amígdalas, ganglios y bazo están compuestos por este tejido, en el que predomina la reticulina, fibra que les proporciona una unión firme con otras estructuras. Además forma la médula ósea roja, responsable de la producción de la sangre.

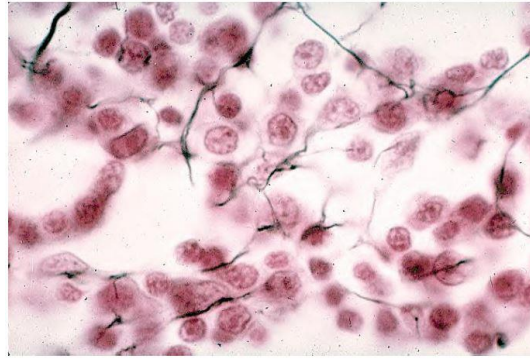


Figura 13 Muestra de tejido conjuntivo reticular. Pueden observarse las fibras de reticulina, que aportan unión a la estructura. [3]

- **Tejido adiposo.** Está formado por unas células características llamadas adipocitos, las cuales están especializadas en el almacenamiento de lípidos.

Se sitúa bajo la dermis, rodeando a órganos internos como el riñón y en el interior de la parte central de los huesos largos, constituyendo la médula ósea amarilla, que participa en la formación de la sangre.

La función principal de este tejido es proporcionar una reserva energética al organismo, así como actuar de aislante térmico y mecánico.

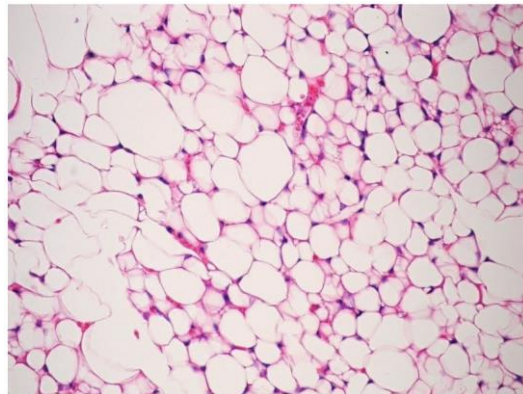


Figura 14 Muestra de tejido adiposo. [3]

- **Tejido cartilaginoso.** Presenta unas células específicas denominadas condrocitos y una matriz gelatinosa rica en fibras de elastina y colágeno, lo que le proporciona una buena elasticidad y resistencia.

Si aparecen mayor cantidad de fibras de colágeno que de elastina, el tejido será más resistente y se le denominará fibroso. Si por el contrario predomina la elastina, se le conocerá como elástico. Además de estos, puede darse un tercer caso, en el que haya pocas fibras y más sustancia intercelular, y el tejido se conocerá como hialino.

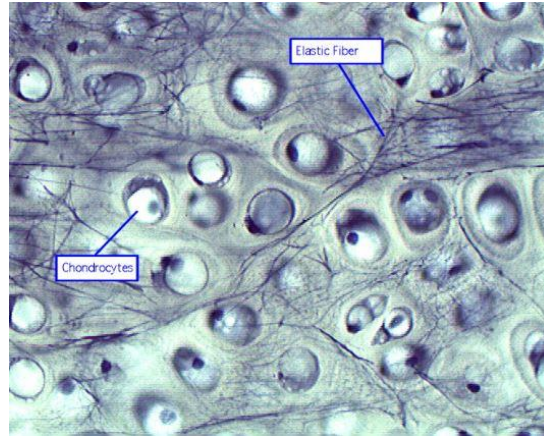


Figura 15 Muestra de tejido cartilaginoso. [3]

- **Tejido sanguíneo.** Se trata de un tipo de tejido cuya matriz intercelular es líquida, plasma sanguíneo, y representa el 60 % de su volumen total. El 40 % restante lo ocupan las células sanguíneas: hematíes, leucocitos y plaquetas.

Este tejido es muy importante en el organismo, encargándose de funciones como la nutrición del resto de células y el aporte de oxígeno, recogiendo los residuos y deshechos para su eliminación.

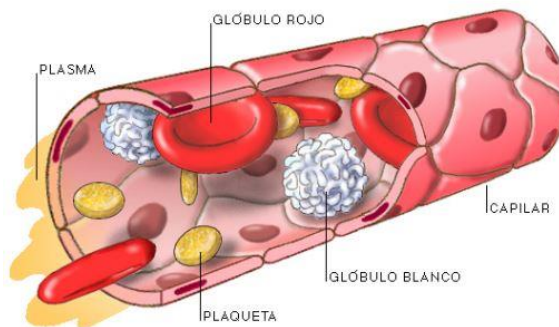


Figura 16 Ilustración del tejido sanguíneo circulando por el interior de un capilar. [2]

- **Tejido óseo.** Para finalizar con la clasificación de los tejidos animales, se ha elegido el tejido óseo, ya que se trata del principal componente de los huesos.

Este tejido está constituido en su mayor parte por componentes intercelulares calcificados, principalmente hidroxapatita, que dotarán al hueso de dureza y rigidez. Además, las células óseas secretan fibras colágenas, que aportan una gran resistencia a la tracción.

Ahora bien, existen dos variedades de tejido óseo, presentes ambas en los huesos. Si se analiza la estructura interna de un hueso cualquiera, se

observan dos zonas en las que la densidad de tejido óseo es claramente distinta. Aunque no existen unos límites perfectamente marcados entre las dos, existe una zona de transición que permite diferenciar entre un lado con mayor densidad de tejido óseo, **hueso compacto o cortical**, y otro con menor, **hueso trabecular o esponjoso**. En los siguientes apartados de la presente memoria se describirán cada uno de estos tipos de tejido óseo con mayor precisión.



Figura 17 Muestra de tejido óseo cortical (izquierda) y tejido óseo trabecular (derecha). [4]

Una vez conocidos los tejidos que forman parte del organismo de cualquier animal, se analiza la estructura de los huesos que se encuentran en el esqueleto humano.

Por un lado, los huesos largos están constituidos por:

- **Tejido óseo**, tanto trabecular como cortical, solándose encontrar éste último en la diáfisis (zona central del hueso) y formando una capa por encima del tejido trabecular, que se encuentra en la epífisis (extremo del hueso).
- **Tejido conjuntivo elástico**, que forma los vasos sanguíneos que atraviesan el hueso para que la sangre pueda realizar sus funciones de intercambio con las células óseas, así como **tejido nervioso** para sensibilizar el hueso.
- **Tejido conjuntivo fibroso**, que crea una capa denominada periostio que cubre toda la superficie del hueso, a excepción de las zonas articulares (donde distintos huesos se unen).
- **Tejido cartilaginoso**, formando una cubierta en las superficies articulares del hueso, conocida como cartílago articular, que ayuda considerablemente a reducir la fricción entre huesos y, por tanto, a disminuir el desgaste de los mismos.
- Por último, encontramos **tejido conjuntivo reticular** en la médula ósea roja, que se sitúa en las cavidades típicas de la estructura ósea trabecular, así como **tejido adiposo** en la médula ósea amarilla, que se encuentra en una gran oquedad en la diáfisis del hueso.

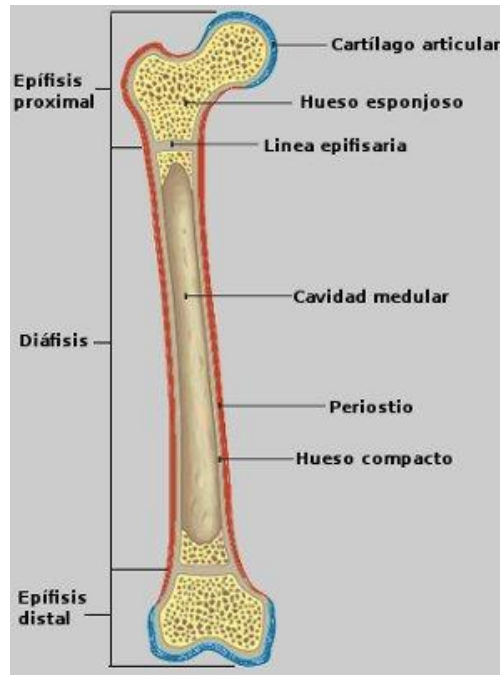


Figura 18 Estructura interna de un hueso largo. [5]

En general, los huesos cortos, planos e irregulares presentan los mismos tejidos que los huesos largos, y distribuidos de igual manera, a excepción del tejido óseo, que en esta ocasión será mayoritariamente trabecular, apareciendo tan solo tejido cortical en una fina capa que define toda la superficie del hueso. No encontraremos médula ósea amarilla.

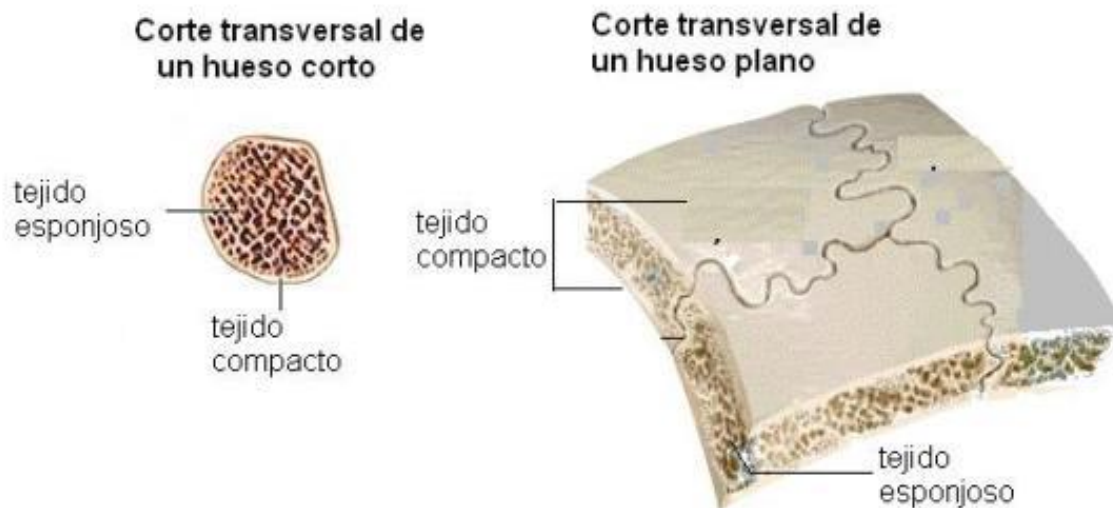


Figura 19 Estructura interna de hueso corto y plano. [2]

2.3. Hueso cortical.

Como hueso compacto, o cortical, se conocen aquellos huesos, o zonas de los mismos, cuyo tejido óseo presenta una elevada densidad, siendo necesario el uso de un microscopio óptico para apreciar su estructura.

Este tipo de hueso, que constituye aproximadamente el 80 % del esqueleto humano, está formado por osteonas, que son un conjunto de láminas de tejido óseo que tienden a disponerse de manera concéntrica alrededor de unos canales conocidos como conductos de Havers [2, 3, 6].

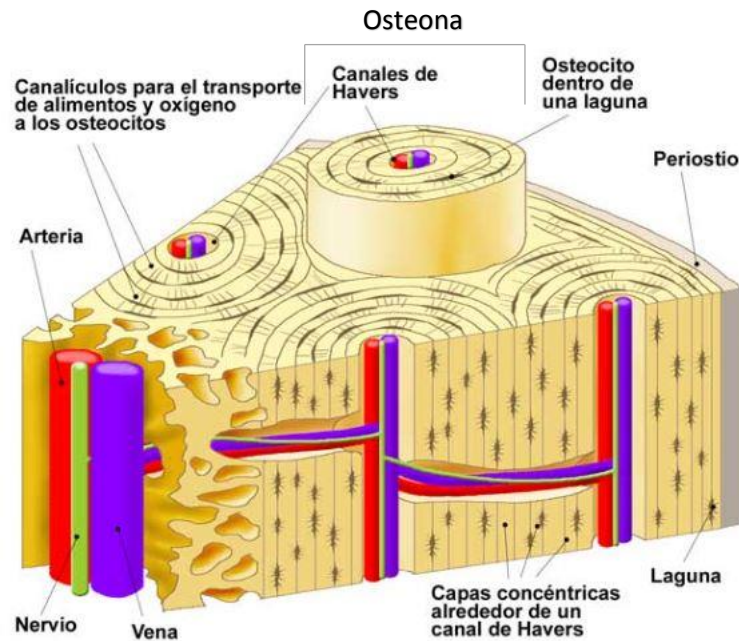


Figura 20 Estructura del tejido óseo cortical. [7]

La función principal de los conductos de Havers, que se disponen en direcciones paralelas al eje longitudinal del hueso, es permitir la entrada en el hueso de vasos sanguíneos, para nutrir las células óseas, y terminaciones nerviosas, para sensibilizarlo.

Osteocitos, osteoclastos y osteoblastos son las principales células que se encuentran en la matriz ósea y su función se describirá en el apartado posterior.

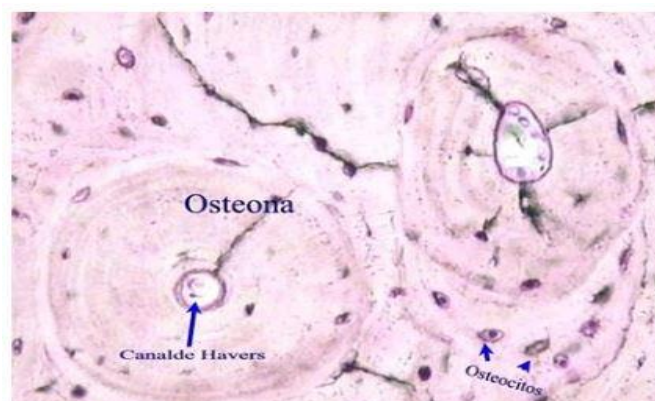


Figura 21 Muestra de tejido óseo cortical. [3]

2.4. Hueso trabecular.

En aquellos huesos, o zona de los mismos, donde la densidad de tejido óseo no es muy elevada, se aprecia a nivel macroscópico una estructura porosa, conocida como estructura trabecular, que da nombre a este tipo de hueso.

Esta estructura se encuentra presente en el 20 %, aproximadamente, del esqueleto humano y está compuesta de láminas de matriz ósea mineralizada, al igual que en el hueso cortical, pero que en este caso se encuentran colocadas de manera irregular formando placas llamadas trabéculas [2, 3, 6].

Entre las trabéculas quedan oquedades que confieren a este tejido la estructura típica de esponja, en donde suele situarse médula ósea roja, encargada de elaborar las defensas inmunitarias del cuerpo. Además, los vasos sanguíneos aprovechan estos huecos para abrirse paso a través del hueso.

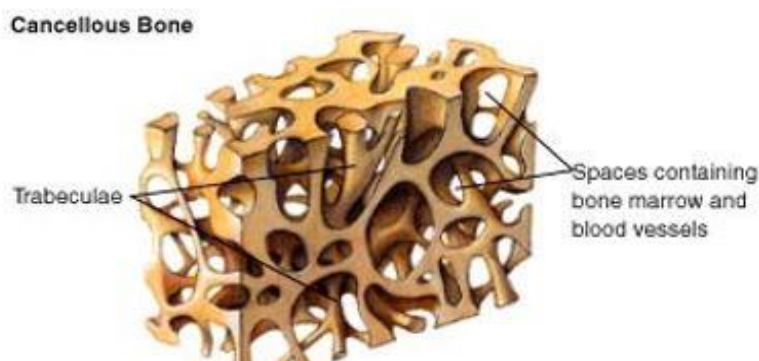


Figura 22 Estructura del tejido óseo trabecular. [7]

En el interior de las trabéculas, aparecen lagunas sobre las que se asientan osteocitos, células encargadas de sintetizar los componentes necesarios para el mantenimiento de la matriz que los rodea.

Los osteocitos no se encuentran aislados, sino que permanecen en contacto entre sí mediante prolongaciones que se extienden a través de pequeños canalículos que se abren paso a través de las láminas de matriz ósea. Esta comunicación es fundamental, pues controlan la cantidad de hueso que se forma y se degrada continuamente.

Ahora bien, los encargados de esta constante formación y degradación del tejido óseo son otras células, osteoblastos y osteoclastos, respectivamente, que también se encuentran presentes en las trabéculas, aunque como puede verse a continuación, se disponen formando una capa alrededor de las mismas, y no en el interior como en el caso de los osteocitos.

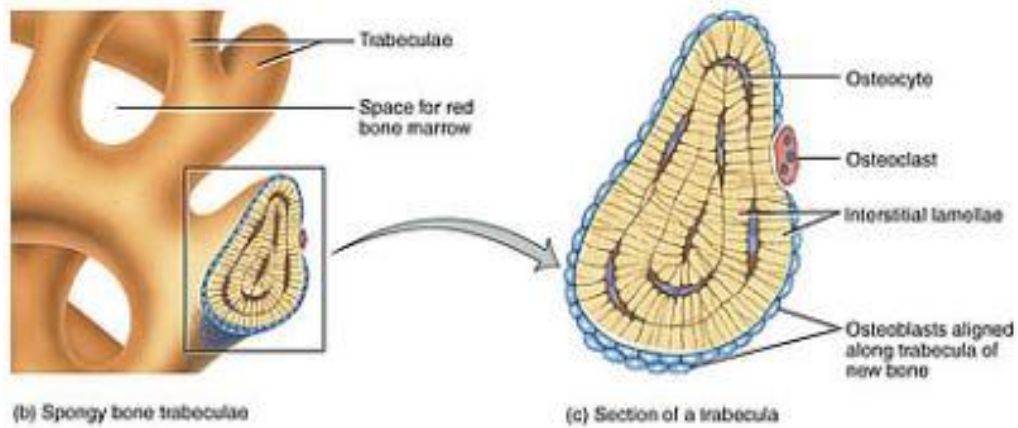


Figura 23 Estructura interna de las trabéculas. [3]

Este tipo de estructura será la que se modelice y estudie en el presente proyecto, para observar cómo varían sus principales propiedades mecánicas con distintos valores de porosidad, lo que puede permitir, por ejemplo, predecir el comportamiento de los huesos pertenecientes a pacientes con osteoporosis, cuya densidad ósea disminuye con el tiempo.

2.4. Osteoporosis.

La osteoporosis es uno de los desórdenes metabólicos óseos más frecuentes en el mundo, caracterizado por la disminución de la densidad ósea, esto es, el aumento de la porosidad, lo que conlleva a una pérdida de resistencia mecánica del hueso que aumenta gravemente el riesgo de sufrir una fractura [8].

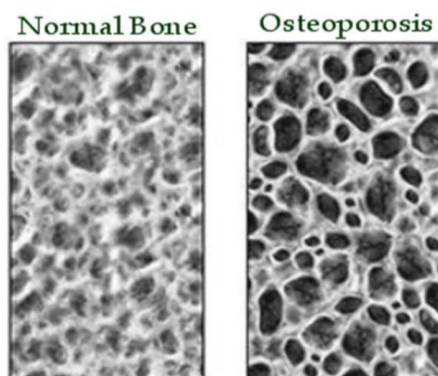


Figura 24 Muestra de hueso normal (izquierda) y hueso con osteoporosis (derecha). Puede apreciarse el incremento de la porosidad. [9]

Las fracturas óseas más típicas son las que se producen en cadera, columna, muñeca, brazo y pierna, generalmente como resultado de una caída, aunque a medida que el desorden aumenta, y la densidad ósea disminuye, una simple tarea del hogar puede ser el desencadenante.

Además, todas estas fracturas son muy dolorosas e impiden al paciente poder llevar una vida normal. Por ejemplo, todos los pacientes con fractura de cadera requerirán asistencia para caminar durante varios meses, y aproximadamente la mitad requerirá andadores o bastones para el resto de su vida [10].

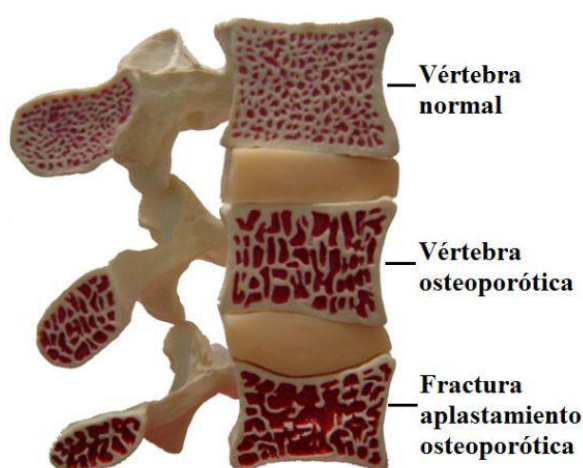


Figura 25 Fractura vertebral típica producida por osteoporosis. [11]

Actualmente se conocen dos síndromes de osteoporosis, asociado cada uno a un grupo de población distinto [12]. Por un lado, la osteoporosis tipo I o postmenopáusica,

que afecta a las mujeres y está asociada a la disminución de niveles de estrógenos, y por otro la osteoporosis tipo II o senil, que afecta generalmente a personas mayores de setenta años.

En general, la osteoporosis tipo I está relacionada con la pérdida de densidad ósea en el hueso trabecular, ya que éste es más sensible a la deficiencia de estrógenos, por lo que se verán más perjudicados aquellos huesos que presenten mayor proporción de este tipo de tejido óseo, es decir, huesos cortos, planos e irregulares.

La osteoporosis tipo II, se debe principalmente a la incapacidad del riñón de sintetizar 1,25 dihidroxicolecalciferol, lo que dificulta la absorción de calcio intestinal y estimula la secreción de parathormona, una hormona que produce una fuerte resorción ósea que afecta al hueso cortical en mayor cantidad que al hueso trabecular, viéndose más afectados, por tanto, los huesos largos.

Por otra parte, existen algunas enfermedades que pueden causar osteoporosis tipo II, tales como el hipertiroidismo. Además, se ha demostrado que determinados factores como el consumo de alcohol o el tabaco aumentan las probabilidades de sufrir osteoporosis de ambos tipos [13].

	TIPO I	TIPO II
Edad (años)	51-75	+ 70
Sexo (F: M)	6:1	2:1
Tipo de pérdida ósea	Principalmente trabecular	Trabecular y cortical
Tasa de pérdida ósea	Acelerada	No acelerada
Sitio fracturado	Vértebra	Vértebra y cadera
Función paratiroidea	Disminuida	Incrementada
Absorción de calcio	Disminuida	Disminuida
Metabolismo de la Vit. D	Disminuye secundariamente	Disminuye primariamente
Causas	Factores relacionados con la menopausia	Factores relacionados con la edad

Figura 26 Tipos de osteoporosis. [12]

Como puede verse, la osteoporosis, en cualquiera de sus dos tipos, afecta en mayor medida a las mujeres. Según [14], en 2009 más de dos millones y medio de mujeres en España padecían osteoporosis, cuatro por cada hombre, afectando al 17.2 % de las mujeres entre los 50 y 59 años, al 35,2 % de las que tienen entre 60 y 70 años y a más del 50 % de mujeres a partir de los 70 años.

Según este mismo artículo, elaborado con datos de la Sociedad Española de Investigación Ósea y Metabolismo Mineral (SEIOMM), se ha observado que durante los primeros cinco años de postmenopausia, la pérdida de masa ósea se sitúa entre el 2 % y el 6 % anual.

Puesto que la osteoporosis postmenopáusica afecta principalmente al hueso trabecular, como se vio anteriormente, estudiar cómo varían sus propiedades mecánicas con el aumento de la porosidad, o lo que es lo mismo, con la pérdida de masa ósea, puede ayudar en gran medida a predecir el comportamiento de los mismos en un determinado número de años, lo que puede permitir a los médicos programar cuándo van a tener que someterse a distintos tratamientos o intervenciones las mujeres que padezcan este tipo de enfermedad.



CAPÍTULO 3

GENERACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

Una vez que se conoce el objeto de estudio, el hueso trabecular, se mostrará cómo se ha creado el modelo de análisis que representa el RVE del mismo y que permitirá estudiar los valores de las distintas constantes elásticas de esta estructura al variar su porosidad.

Antes de nada, se comenzará definiendo el programa utilizado para generar el modelo, Abaqus/CAE, así como el lenguaje de programación empleado para automatizar este proceso de creación en el programa: Python. Además, puesto que una vez creado el modelo éste será analizado empleando el Método de los Elementos Finitos (MEF), una parte importante de este punto será definir cómo funciona este método numérico y exponer sus ventajas frente a otros.

Por último, se realizarán los análisis de sensibilidad que permitirán definir los parámetros geométricos del modelo y de la malla aplicada sobre el mismo para obtener la mayor precisión posible en los resultados. Con estos puntos resueltos, el modelo ya estará listo para que sea analizado y puedan extraerse los resultados.

3.1. El método de los elementos finitos y Abaqus.

3.1.1. El método de los elementos finitos.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es un método numérico de utilización muy extendida para la resolución de problemas de mecánica de sólidos. Si bien no ofrece una solución exacta a un problema planteado, sí es capaz de calcular una solución bastante aproximada [15].

Se trata de un método útil para casos en los que por métodos matemáticos convencionales la resolución sería prácticamente imposible, debido a la enorme complejidad de los sistemas. La clave del MEF es sustituir las complejas ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas, capaces de aportar soluciones que no distan mucho de las que se obtendrían con la formulación original.

El MEF se basa en la transformación de un cuerpo continuo en un modelo discreto aproximado, lo que se conoce como discretización. Para conseguirlo, se divide el cuerpo en un número finito de elementos, a los que se denomina Elementos Finitos, interconectados entre sí a través de sus esquinas o nodos, de tal forma que el sistema completo se pueda formar por ensamblaje de estos elementos.

Calculando el valor de los desplazamientos en los nodos, surgidos como consecuencia de las cargas y ligaduras impuestas en el sólido, se obtienen los desplazamientos en el interior del elemento mediante funciones de interpolación [16]. Una vez conocidos éstos, es posible estimar las tensiones y deformaciones, empleando las ecuaciones básicas de la elasticidad de materiales.

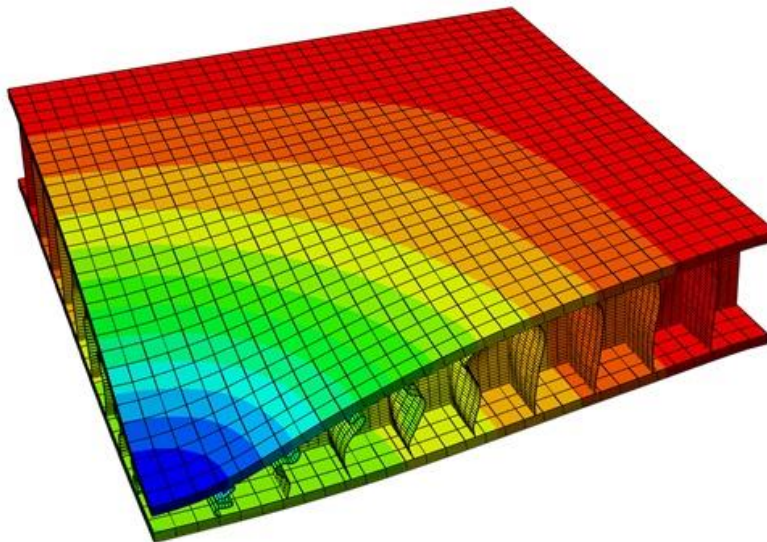


Figura 27 Método de los Elementos Finitos aplicado mediante ABAQUS/CAE a un panel tipo sándwich.

Los programas informáticos que emplean este método, como es el caso de Abaqus/CAE, contienen una extensa librería de elementos finitos de distinta geometría, lo que nos permite seleccionar el que mejor se ajuste al objeto de estudio.

Por otra parte, si se juega con el número total de nodos, que constituyen lo que comúnmente se denomina “malla”, es posible obtener distinta precisión en el análisis. En general, a mayor número de nodos, mayor precisión, pero se debe tener en cuenta que esto conllevará un mayor número de ecuaciones para resolver, y por tanto, un mayor consumo de recursos y tiempo de análisis.

En cualquier caso, una de las principales ventajas del MEF es el ahorro en tiempo y coste frente a otras técnicas tradicionales como pueden ser los ensayos experimentales. Con relativa rapidez, y utilizando únicamente un ordenador, se puede predecir con gran exactitud cuál será el comportamiento de un modelo bajo casi cualquier tipo de condiciones.

3.1.2. Abaqus.

La suite de software Abaqus FEA [17], desarrollada en la década de los setenta por David Hibbitt, Dr. Bengt Karlsson y P. Sorensen, es una potente herramienta que aplica el método de los elementos finitos para la realización de cálculos estructurales. Se utiliza en diversos sectores, tales como el aeroespacial, la automoción o la biomedicina, permitiendo diseñar y analizar modelos de gran complejidad.

Abaqus FEA consta de cuatro productos, especializados cada uno de ellos en una de las etapas del análisis por medio de elementos finitos o en la evaluación de un tipo de problema distinto. Los productos son:

- **Abaqus/CAE.** Permite modelar todo tipo de componentes mecánicos, así como conjuntos formados por distintos elementos.
Además de poder utilizar su propia interfaz, esta herramienta permite importar diseños ya creados en los programas CAD más comunes, o automatizar el proceso de modelado mediante scripts en lenguaje Python.
Por último, permite visualizar los resultados de los análisis realizados sobre dichos diseños con otras herramientas específicas de evaluación.
- **Abaqus/Standard.** Emplea el método de elementos finitos para resolver problemas estáticos, o dinámicos a baja velocidad, tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia.
- **Abaqus/Explicit.** En esta ocasión, se emplean los elementos finitos para evaluar casos dinámicos a muy alta velocidad y quasi-estáticos, donde predominan las no-linealidades en el material.
- **Abaqus/CFD.** Se trata de una aplicación software especializada en la resolución de modelos de dinámica de fluidos mediante elementos finitos, resultando de

especial interés por la posibilidad de realizar simulaciones paralelas en las que se tienen en cuenta la interacción fluido-estructura y la situación térmica.

En concreto, el programa utilizado para la realización del proyecto ha sido Abaqus/CAE, en su versión 6.12-1, que tiene como gran ventaja la integración de todos los productos citados anteriormente. Por tanto, a través de un solo programa, somos capaces de realizar las tareas de modelado, procesado y post-procesado que caracterizan a todo software completo de análisis por medio de elementos finitos.

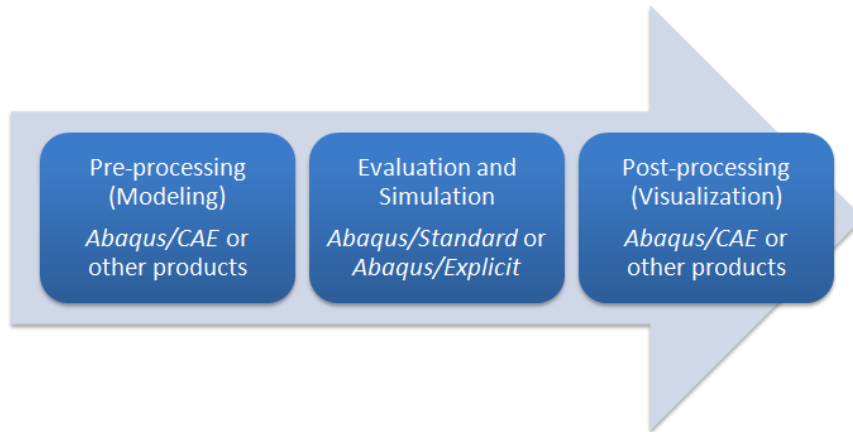


Figura 28 Productos de Abaqus FEA empleados en cada fase del análisis por medio de elementos finitos.

3.2. Python.

3.2.1. Introducción.

Python es un lenguaje de programación interpretado que fue creado por Guido van Rossum a finales de los ochenta con la filosofía de hacer hincapié en una sintaxis que favorezca un código legible [18].

Bajo esta premisa, Python emplea palabras donde otros códigos de programación emplearían símbolos, como en el caso de los operadores lógicos, además de emplear espacios o tabuladores para declarar los bloques, en lugar de utilizar caracteres.

Además, se trata de un lenguaje multiparadigma, es decir, que permite varios estilos de programación como la programación orientada a objetos, la programación imperativa y la programación funcional.

Una de las grandes ventajas es la facilidad de extensión, pudiendo escribir fácilmente nuevos módulos en C o C++.

Por último, este lenguaje puede incluirse en aplicaciones que necesitan una interfaz programable, como es el caso de Abaqus/CAE, lo que ha facilitado la realización del proyecto, al poder crear un código que automatice el proceso de creación y análisis del modelo.

3.2.2. Generación de un script en Python.

Una de las tareas más complejas de este proyecto es la realización del modelo sobre el que trabajar.

Puesto que se pretende que se trate de un proceso automatizado, en el que además entran en juego variables aleatorias, lo más apropiado es aprovecharse de la ventaja que nos ofrece el programa, en su etapa de pre-procesado, de acceder a sus funcionalidades por medio de scripts realizados en lenguaje Python [19, 20, 21]. De esta forma, puede darse la orden, directamente, de crear un modelo y mandarlo a ejecutar desde un script, sin necesidad de emplear la interfaz gráfica (GUI) que nos ofrece Abaqus/CAE.

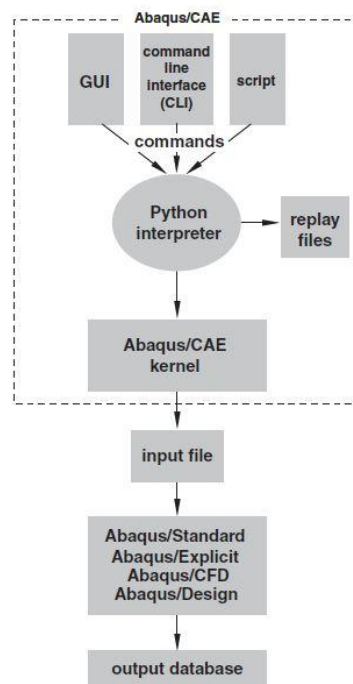


Figura 29 Funcionamiento de Abaqus/CAE. [20]

Para importar los scripts realizados en lenguaje Python, nada más acceder al programa éste nos mostrará una ventana en la que deberá seleccionarse la opción “Run Script”.

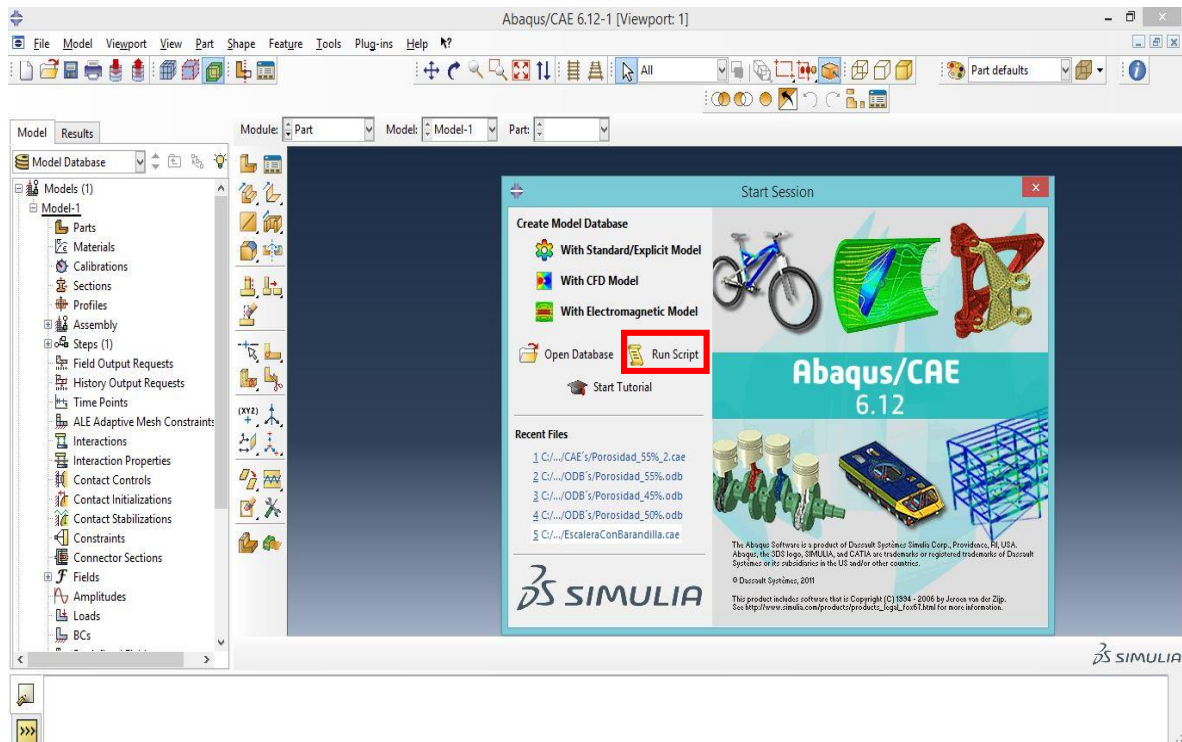


Figura 30 Ventana de inicio de Abaqus/CAE.

3.3. Volumen Elemental Representativo.

Para poder estimar las propiedades mecánicas generales de la estructura trabecular, es necesario disponer de un modelo que sea capaz de representarla y cuyos resultados, al aplicar el Método de Elementos Finitos, puedan ser extrapolables a cualquier pieza constituida por dicha estructura, con alto grado de exactitud.

Para ello, en teoría de materiales compuestos, se emplea lo que se conoce como Volumen Elemental Representativo, RVE por sus siglas en inglés, y la correcta elección de su geometría es fundamental si se quieren cumplir los objetivos definidos en el párrafo anterior.

Tal y como se detallará en posteriores apartados, la estructura trabecular ha sido imitada mediante la inserción de esferas huecas del mismo radio, que actúan como formadoras de poros, en posiciones aleatorias en el interior de una matriz de propiedades correspondientes a las del material de las trabéculas.

La matriz tendrá forma cúbica, y al sumarle los huecos generados por las esferas, formará el RVE con el que se tratará de obtener las propiedades mecánicas de la estructura trabecular.

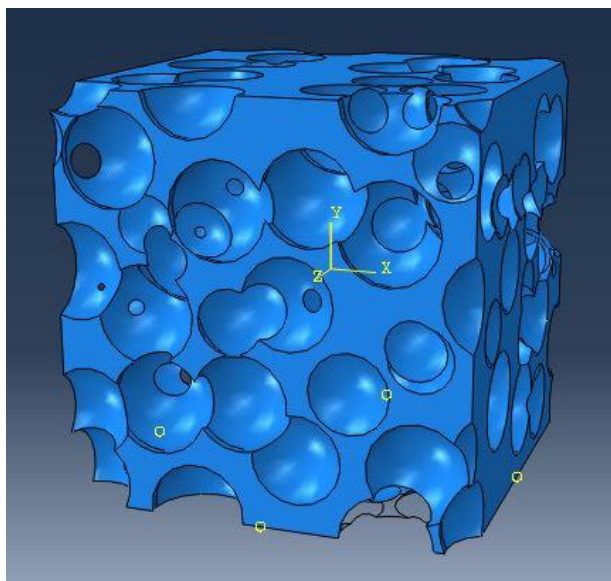


Figura 31 RVE generado en Abaqus/CAE.

Es importante puntualizar que las esferas se superpondrán para generar los poros, por lo que el tamaño de los mismos variará en función del número de esferas que se hayan cortado para formarlos.

Al distribuirse las esferas de forma aleatoria, es raro que se corten más de tres para formar un poro, por lo que estimará un tamaño medio de los poros de dos veces el diámetro de la esfera.

El motivo de permitir que las esferas se corten es que, si no lo hacen, es imposible conseguir la porosidad tan elevada que puede presentar este tipo de estructuras, entre un 30 y un 70 % según la literatura [22].

En teoría de materiales compuestos, se realizan modelos como el presentado en este trabajo, pero con inclusiones esféricas que no se superponen, al representar esferas reales de materiales concretos que se han introducido en una matriz para reforzarla. Analizando artículos donde se presentan dichos modelos, se observa que la máxima fracción de volumen varía entre un 30 % y un 35 %. Por ejemplo, en [23] se empleó una fracción de volumen del 30 % para estudiar el impacto de la geometría de las inclusiones en las propiedades mecánicas de los materiales compuestos. Si se desea alcanzar una fracción de volumen mayor, será necesario trabajar con esferas superpuestas.

Una vez se ha llegado a este punto, se analiza cuál debe ser el tamaño del RVE, y de los poros dentro de él, en una primera aproximación, para lograr la mayor precisión.

- **Tamaño del RVE.**

Aunque, posteriormente, se dedicará un apartado de la memoria a realizar un análisis de la sensibilidad del módulo de elasticidad efectivo en función del tamaño del RVE, lo que permitirá determinar su geometría óptima, es necesaria una primera estimación para poder comenzar a trabajar.

En algunos artículos se ha tratado de determinar el menor tamaño de RVE para estimar con precisión las propiedades mecánicas en materiales compuestos elásticos formados por una distribución aleatoria de esferas idénticas, sin solaparse, en el interior de una matriz. En [24], los resultados muestran que, para tamaños de arista del RVE en torno a 4,5 veces el valor del diámetro de las inclusiones esféricas, el error producido en la estimación del módulo de elasticidad efectivo es menor de 1 %.

Este resultado ha sido ampliamente reconocido en el ámbito de la teoría de materiales compuestos, y muchos autores hacen referencias al artículo, como en [23], donde se emplea un tamaño de arista del RVE de 7,5 veces el valor del diámetro de las inclusiones esféricas para conseguir un error cercano al 0,3 %.

Este trabajo se acercará más al valor obtenido en [24], considerando un tamaño de arista de 4 veces el valor del diámetro de las esferas, con lo que el error rondará en torno al 1 %. Aunque en este caso las esferas se solapan, el valor será apropiado para una primera estimación, y posteriormente se estudiará la elección del tamaño del RVE más en profundidad.

Para poder conocer cuál es este primer valor exacto, el paso lógico siguiente es determinar el diámetro de las esferas que actuarán de poros en el interior del cubo.

- **Tamaño de los poros.**

Para obtener este valor, basta con acudir a la literatura en busca de mediciones realizadas con técnicas de microscopía sobre huesos que presentan estructura trabecular.

En [25], por ejemplo, se afirma que el tamaño de las cavidades situadas entre las trabéculas varía entre 0,3 y 1,5 mm. Para llegar a estas conclusiones, los autores

se apoyan en mediciones realizadas sobre distintos tipos de huesos con estructura trabecular en diversos grupos de población.

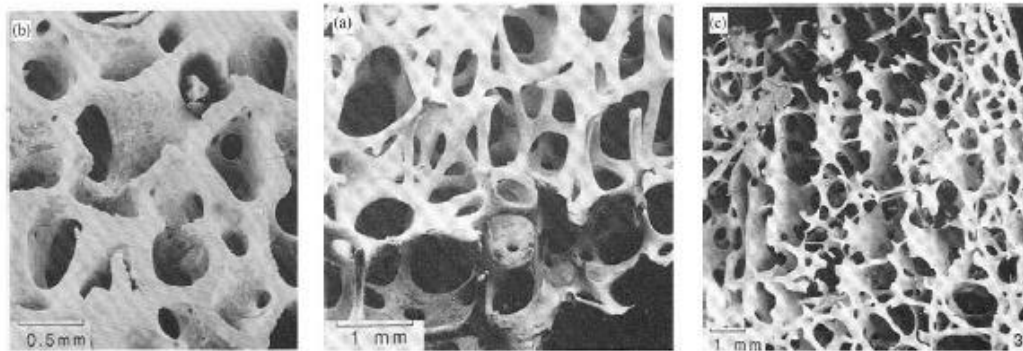


Figura 32 Vista al microscopio de la estructura trabecular de distintos huesos humanos, realizadas sobre muestras de distintos pacientes. (a) Muestra de vértebra lumbar de un paciente de entre 40 y 60 años. (b) Muestra de vértebra lumbar de un hombre entre 54 y 90 años. (c) Muestra de fémur distal. [25]

Como ya se comentó anteriormente, el valor medio de las oquedades será el resultado de multiplicar por dos el diámetro de nuestra esfera. Si se considera, por tanto, que un buen tamaño para los poros sería 1,2 mm, quedando dentro del rango de referencia fijado por [25], cada esfera tendría un diámetro de 0,6 mm.

Con el diámetro calculado, obtenemos que el tamaño de la arista de nuestro RVE, para una primera aproximación, será:

$$L = 4 * 0,6 = 2,4 \text{ mm}$$

3.4. Modelado de la estructura trabecular.

Aunque la generación del modelo, como ya se indicó, se realiza a partir de un script escrito en lenguaje Python, y que Abaqus/CAE es capaz de importar para automatizar este proceso y que no sea necesaria la utilización de su Interfaz Gráfica de Usuario (GUI), sí que es necesario seguir la misma estructura de creación por módulos o pasos que se emplea en ella, para asegurar un correcto funcionamiento del programa.

A continuación se detallarán las acciones llevadas a cabo para la creación del modelo de análisis, así como las distintas suposiciones y simplificaciones que se han tenido en cuenta, siguiendo el orden que Abaqus/CAE establece con sus módulos.

- Módulo “PART”.

Se trata del primer paso que el programa obliga a realizar, consistiendo en la construcción de los cuerpos sólidos sobre los se trabajarán, para lo que se ofrece una serie de herramientas.

En este caso particular, para la generación del RVE que imite la estructura trabecular, serán necesarios dos cuerpos sólidos, o como Abaqus/CAE los denomina, “parts”, ambos tridimensionales y deformables.

- Cubo.

Es fundamental la creación de un cubo de lado “L” para poder representar la geometría del RVE, siendo “L” igual al valor del lado de éste, que posteriormente se estudiará en detalle.

Para obtener el cubo, se debe partir de lo que Abaqus/CAE denomina “sketch” (boceto), que se trata de una sección bidimensional que se puede diseñar a partir de figuras geométricas simples como líneas o círculos. En esta ocasión, se dibujará un cuadrado de lado “L”.

Posteriormente, el programa permite extruir la sección creada y otorgarle una cierta profundidad. Puesto que se busca un cubo, la profundidad será igual al lado definido anteriormente.

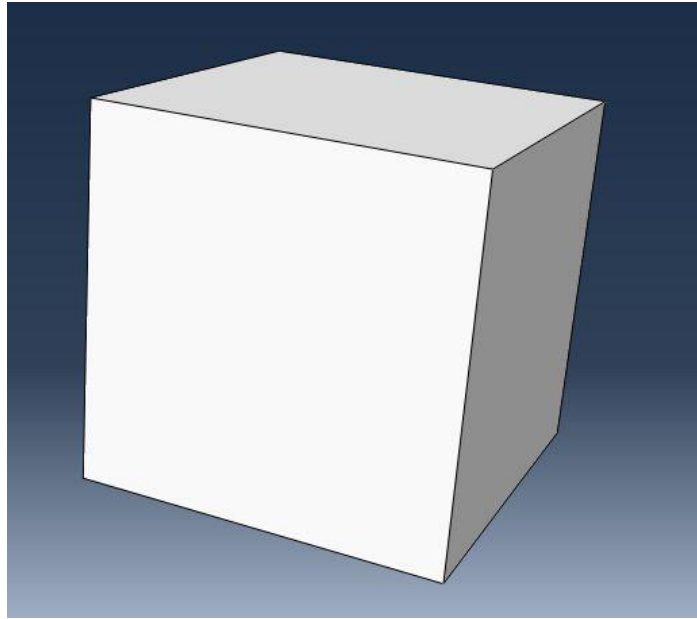


Figura 33 Cubo generado en Abaqus/CAE.

- Esfera.

Para representar los poros característicos de la estructura trabecular, se partirá de esferas del mismo radio “R”, siendo ésta igual al valor establecido en el apartado anterior.

Al igual que con el cubo, se empezará con un boceto, representando en este caso una media circunferencia de radio “R”.

Por último, se obtendrá la esfera a partir de una extrusión por revolución de la figura anterior, que es otra de las operaciones que el programa permite realizar.

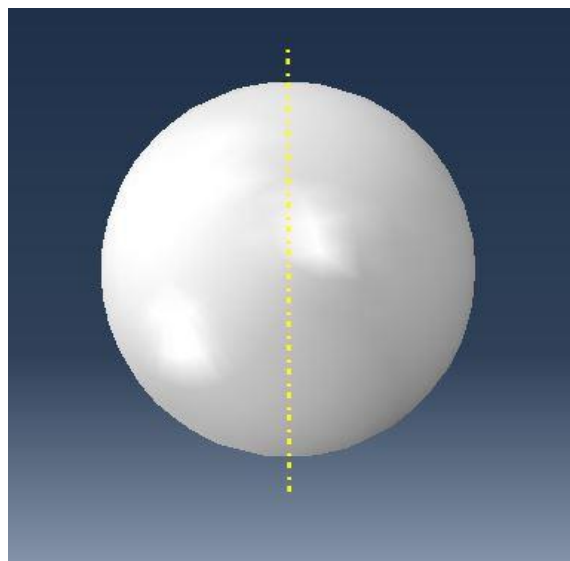


Figura 34 Esfera generada en Abaqus/CAE.

- **Módulo “PROPERTY”.**

Una vez generados los cuerpos sólidos necesarios, se les debe asignar el material que corresponda a cada uno, definiendo las características del mismo.

En el caso del cubo, puesto que, una vez introducida la porosidad, representará las trabéculas propias de la estructura del hueso esponjoso, se le deberá introducir las propiedades características de las mismas. Para conseguirlas, es necesario acudir a la literatura en busca de un valor de referencia.

Durante las últimas tres décadas se han realizado gran cantidad de estudios, empleando diferentes técnicas, para hallar las propiedades elásticas del hueso trabecular y del material que lo forma, siendo el ingeniero biomédico Richard B. Ashman uno de los autores más reconocidos en este campo.

En uno de sus artículos de mayor prestigio [26], empleando técnicas de medición por ultrasonidos, se determinó el módulo de elasticidad del material que forma el hueso trabecular, esto es, el material que forma las trabéculas. Tras analizar distintas muestras, se obtuvo un módulo de elasticidad medio de 13 GPa (S.D. 1,47), con una densidad media del material de 1770 kg/m^3 , siendo éstos los valores que se emplearán en el presente proyecto.

En cuanto al módulo de Poisson, diversos autores han coincidido en emplear uno de valor 0,3 en sus estudios sobre este tipo de material. Por ejemplo, en [27] se usó para modelar el hueso trabecular mediante paquetería de elementos finitos basándose en estructuras de Voronoi.

Así pues, quedan establecidas todas las propiedades necesarias para definir el material empleado en el modelo de estudio. Como las esferas representarán los huecos vacíos entre las trabéculas, no será necesario definirles ningún material.

- **Módulo “ASSEMBLY”.**

Completados los pasos anteriores, ya se puede generar el RVE con la estructura trabecular. Para ello, mediante la programación correspondiente, se obliga al programa a crear un número de esferas definido por el usuario, replicando la esfera que se creó anteriormente, y distribuir las aleatoriamente en el interior del cubo de lado “L”.

Además, cuando una esfera corte con una de las caras de cubo, automáticamente se generará otra esfera idéntica que corte con la cara opuesta, desplazada de la esfera original una distancia “L” (lado del cubo) en una línea perpendicular que se extiende desde el centro de la esfera original hasta cortar perpendicularmente con la cara opuesta. De esta forma, conseguiremos acercarnos a unas condiciones de contorno periódicas.

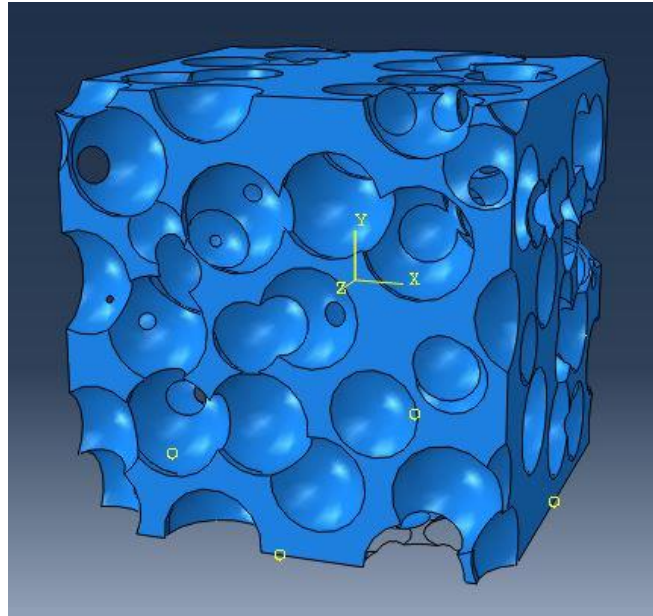


Figura 35 RVE empleado en el proyecto.

Aunque pudiera parecer que carece de importancia, la precisión de los resultados del análisis está directamente relacionada con la asignación de condiciones de contorno periódicas, por lo que es algo que se suele tener en cuenta cuando se utilizan volúmenes elementales representativos en teoría de materiales compuestos. Mediante estas condiciones, se consigue que con un volumen pequeño se pueda simular un gran modelo. La razón de ello es que los desplazamientos en caras opuestas son muy parecidos, además de que la disposición de las esferas en las caras permitiría que se pudieran juntar varios de estos volúmenes idénticos para generar los modelos más grandes y encontrar en todo momento esferas completas en su interior.

En [28], se llega a la conclusión de que, para un mismo modelo, si se desea obtener la misma precisión en los resultados empleando condiciones de contorno periódicas o sin aplicarlas, el tamaño del RVE debe ser mucho mayor en el segundo caso.

Puesto que los estudios en los que nos basamos anteriormente, para seleccionar la geometría del modelo, se realizaron teniendo en cuenta condiciones de contorno periódicas, es importante que las apliquemos a nuestro modelo. De no hacerlo, la precisión resultante sería mucho menor.

- **Módulo “STEP”.**

Una vez en este punto, se debe fijar el tiempo de simulación requerido, que en este caso será de 1 segundo.

Sin embargo, puesto que el análisis que se va a realizar es estático, ya que ninguna de las condiciones aplicadas al modelo varía con el tiempo, los resultados serán los mismos sea cual sea el tiempo de simulación asignado.

Otra de las cosas que se decide en este apartado son los parámetros que se desea que el programa estudie sobre el modelo para enseñar en los resultados, siempre teniendo que elegir entre los que Abaqus/CAE ofrece, tales como tensión de Von Mises o desplazamientos.

- **Módulo “LOAD”.**

Generada la estructura del modelo, se procede a introducir en él las condiciones de contorno con las que se conseguirá, tal y como se explicará más adelante, obtener distintas propiedades mecánicas de la estructura.

Se llevarán a cabo tres acciones fundamentales:

- Empotramiento.

Se establece un punto del modelo en el que los desplazamientos y los giros estén impedidos en cualquiera de las direcciones, es decir, en el que se anulan todos los grados de libertad. Esto es a lo que Abaqus/CAE denomina “encastre”, y permitirá que el RVE quede fijado y no disponga de libertad de movimientos. Este empotramiento se ha aplicado sólo en un punto para dejar libertad al resto de los nodos y así obtener unas condiciones parecidas a las condiciones de contorno simétricas descritas con anterioridad.

El punto en cuestión se situará en el centro de una de las caras de cubo, como puede verse en la siguiente imagen.

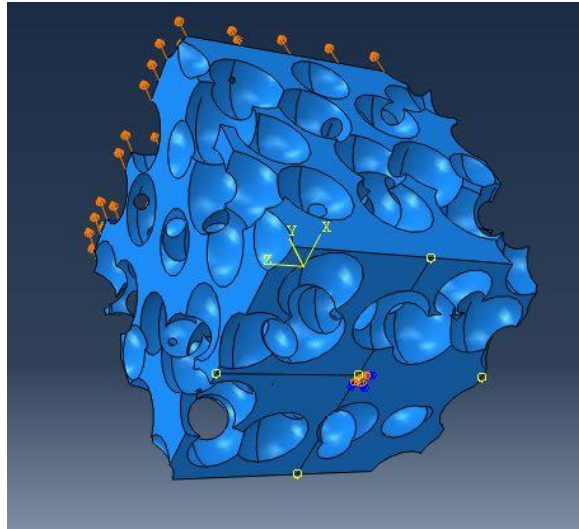


Figura 36 Empotramiento aplicado sobre el RVE empleado en el proyecto.

- Desplazamiento.

En la cara opuesta a la que se ha situado el “encastre”, que a partir de ahora se denominará cara superior, se fija un desplazamiento positivo en toda la superficie, de modo que el RVE se encuentre sometido a tracción.

El valor de dicho desplazamiento será proporcional al tamaño de arista del RVE y valdrá un 10% del valor de ésta.

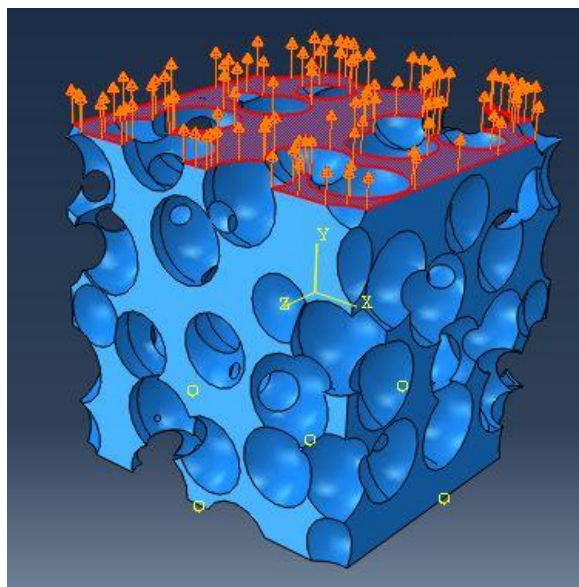


Figura 37 Desplazamiento aplicado sobre la cara superior del RVE empleado en el proyecto.

Con la medida de la arista del RVE estimada anteriormente, el valor del desplazamiento será:

$$\text{Desplazamiento} = 2,4 * 0,1 = 0,24 \text{ mm}$$

- Restricción de desplazamiento.

Una vez aplicado el desplazamiento en la cara superior, y encastrado el cubo en el punto central de la inferior, es necesario restringir la cara inferior para que al traccionar el cubo no se despegue del plano horizontal, sino que la tracción provoque únicamente un desplazamiento en las direcciones perpendiculares al sentido de la misma, provocando una reducción de área, como ocurriría en la realidad si se realizase el ensayo.

Para conseguir esto, se realizarán los mismos pasos que se hicieron para establecer el desplazamiento en el punto anterior, pero en esta ocasión, fijando un desplazamiento cero en la cara inferior para la misma dirección.

Al no especificarse nada más, el resto de direcciones dispondrán de libertad de movimientos.

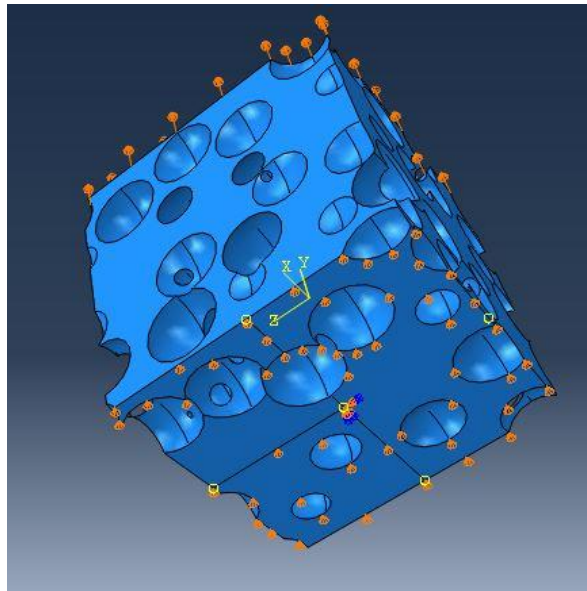


Figura 38 Restricción de desplazamiento aplicada sobre la cara inferior del RVE empleado en el proyecto.

- Módulo “MESH”.

El último paso, antes de ejecutar el análisis del modelo, es mallarlo, para que el programa pueda emplear el Método de los Elementos Finitos.

Como ya se describió anteriormente, mallar consiste en dividir el modelo en pequeños elementos de geometría definida, indicando el tamaño del lado del elemento, con lo que se tiene un determinado número de nodos.

En este caso, puesto que se trabaja con un modelo sólido tridimensional, el elemento que Abaqus/CAE establece por defecto es uno con geometría tetraédrica.

Ahora bien, el programa permite escoger entre dos elementos tetraédricos distintos, cuya diferencia se encuentra en el número de nodos. Para entender mejor como es cada uno, y cuál es el motivo que justifica la elección de uno de los dos en el estudio, ambos se definen a continuación.

- C3D4.

Con este código, Abaqus/CAE hace referencia a un elemento tetraédrico en cuyos vértices se encuentran los nodos sobre los que se aplicarán los cálculos propios del Método de Elementos Finitos.

Se trata, por tanto, de un elemento que cumpliría con la descripción típica de un Elemento Finito lineal.

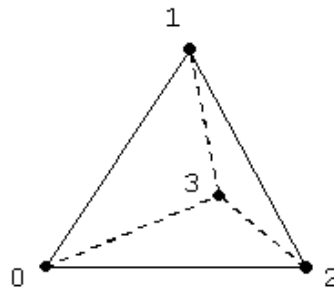


Figura 39 C3D4. Elemento Finito tetraédrico lineal con sus 4 nodos.

- C3D10.

Al igual que en el caso anterior, este elemento posee una geometría tetraédrica. Sin embargo, además de los nodos que aparecen en los vértices, Abaqus/CAE decide añadir otros seis, situándolos en el centro de cada arista, con lo que se consigue un total de diez nodos.

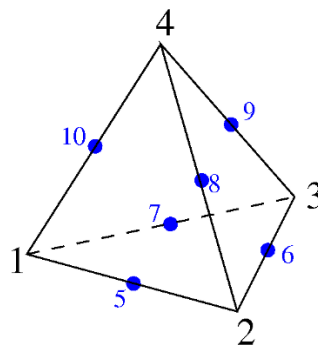


Figura 40 C3D10. Elemento Finito tetraédrico cuadrático con 10 nodos.

El aumento en el número de nodos se debe a que, experimentalmente, se ha observado que el Elemento Finito tetraédrico de cuatro nodos tiende a ser

excesivamente rígido, obteniendo resultados más precisos introduciendo nodos en las aristas.

Como en este estudio se buscan resultados con la mayor precisión posible, este será el tipo de elemento que se emplee para mallar el modelo.

Una vez conocido el tipo de elemento, quedará por definir el tamaño de malla, que como ya se explicó, es la distancia entre nodos consecutivos. Puesto que este parámetro está directamente relacionado con la precisión del análisis y los tiempos de cálculo, merece un estudio aparte, y su valor se determinará realizando un análisis de sensibilidad de la malla en apartados posteriores.

3.5. Análisis de la sensibilidad.

3.5.1. Sensibilidad respecto a la malla.

Como ya se comentó, en general, un aumento en el número de nodos empleados en el modelo para analizarlo, conlleva un aumento de precisión en los resultados.

Sin embargo, conforme aumenta el número de nodos, el número de ecuaciones que tiene que resolver el programa también lo hace, implicando una espera mayor para poder obtener los resultados. Por este motivo, aunque en análisis de modelos sencillos pueda ser algo que no cobre mucha importancia, en cualquier estudio que utilice un modelo complejo, como el del presente trabajo, se hace imprescindible un correcto ajuste del número de nodos, para obtener una buena precisión, minimizando el tiempo de cálculo.

Los programas que emplean el Método de Elementos Finitos, como Abaqus/CAE, no permiten al usuario elegir un número concreto de nodos para realizar el análisis, sino que le permiten jugar con la medida del lado del elemento empleado para discretizar el modelo, lo que se conoce como tamaño de malla. Al disminuir el tamaño de malla, más nodos entrarán dentro del sólido, y por consiguiente, aumentará la exactitud de los resultados.

Como una de las principales propiedades mecánicas de la estructura ósea trabecular que se pretende obtener en este trabajo es su módulo de elasticidad, también denominado módulo de Young, va a estudiarse como varía el valor de éste, obtenido aplicando el Método de Elementos Finitos sobre un mismo modelo que represente la estructura (misma porosidad), en función del tamaño de malla empleado para hacer el análisis.

Se tomará un valor de tamaño de malla como referencia, con el cual podrá considerarse que se obtienen unos resultados muy precisos, por tanto, de error despreciable, y a partir de ahí se irá incrementando el tamaño de malla para encontrar aquel que proporcione unos resultados que se acerquen al 1 % de error, que puede considerarse admisible, respecto al valor obtenido con el tamaño de malla de referencia, pero sin que se pase.

De esta forma, se conseguirán unos resultados con un error pequeño, mientras que el tiempo de cálculo se verá reducido, lo que será muy útil para realizar el proyecto, ya que se deberán analizar multitud de casos.

Para realizar el análisis, se parte de un modelo con el 30 % de porosidad. Como valor de referencia, se considera que un tamaño de malla de 0,1 mm ofrece un resultado muy preciso, aunque claro está, el tiempo de cálculo se ve muy penalizado. A partir de él, los valores del tamaño de malla se irán incrementando en 0,05 mm para obtener el módulo de elasticidad global en cada caso.

A pesar de que el valor del módulo de elasticidad no sea un dato que el programa arroje directamente tras realizar el análisis, posteriormente, en el apartado en el que se definirá el problema a resolver, se explicará cómo se ha obtenido.

Con todo definido, y tras evaluar los distintos casos, la tabla obtenida es la siguiente:

Tamaño de Malla (mm)	Módulo de Elasticidad (GPa)	Error (%)
0,1	6,4190625	0
0,15	6,445902778	0,41639284
0,2	6,482673611	0,98124809
0,25	6,498784722	1,22672508
0,3	6,498211806	1,21801671
0,35	6,497847222	1,21247422
0,4	6,500434028	1,25178607
0,45	6,501180556	1,26312529
0,5	6,501909722	1,27419829
0,55	6,501649306	1,27024393

Tabla 1 Módulo de elasticidad obtenido con distintos tamaños de malla, para un mismo modelo.

Como puede observarse, conforme aumenta el tamaño de malla, la precisión en los resultados disminuye, aumentando el valor del módulo de elasticidad de la estructura.

Esta pérdida de precisión se hace evidente hasta que el tamaño de malla adquiere un cierto valor, en nuestro caso 0,25 mm, a partir del cual los valores del módulo de elasticidad se estabilizan, con elementos relativamente grandes.

Como criterio de selección del tamaño de malla para este trabajo, se decide escoger aquel valor que ofrezca un módulo de elasticidad cuyo error porcentual respecto al calculado con el tamaño de malla de referencia sea lo más cercano a un 1 %, pero sin pasarse. El error porcentual, que ya aparece en la tabla anterior, se ha calculado de la siguiente forma:

$$Error [\%] = \frac{E_{ref} - E}{E} * 100$$

Donde:

- E_{ref} = módulo de elasticidad obtenido con un tamaño de malla de 0,1 mm.
- E = módulo de elasticidad en cada caso.

A la vista de los resultados, el tamaño de malla que se empleó será de 0,2 mm, obteniendo un error en los resultados del 0,98 % frente al obtenido con valor de referencia.

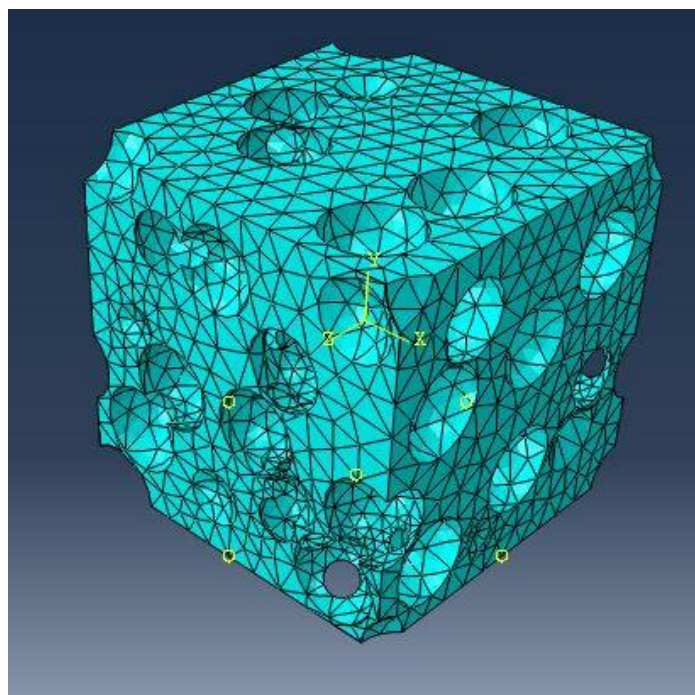


Figura 41 Vista del mallado del RVE empleado en este proyecto, utilizando un tamaño de malla de 0,2 mm.

Ahora bien, para poder apreciar como el tiempo de cálculo aumenta conforme el tamaño de malla disminuye, se han registrado los tiempos que cada caso anterior ha empleado para realizar el análisis, los cuales pueden verse en la siguiente tabla.

Tamaño de Malla (mm)	Módulo de Elasticidad (GPa)	Error (%)	Tiempo de Espera (s)
0,1	6,4190625	0	322
0,15	6,445902778	0,41639284	92
0,2	6,482673611	0,98124809	62
0,25	6,498784722	1,22672508	56
0,3	6,498211806	1,21801671	48
0,35	6,497847222	1,21247422	48
0,4	6,500434028	1,25178607	49
0,45	6,501180556	1,26312529	48
0,5	6,501909722	1,27419829	48
0,55	6,501649306	1,27024393	48

Tabla 2 Tiempo empleado por el programa para realizar el análisis en cada caso estudiado en el análisis de sensibilidad.

Como era de esperar, para el caso de referencia, el tiempo de simulación es el más elevado, al tratarse del caso en el que el programa tiene que evaluar mayor número de ecuaciones por el mayor número de nodos.

Si se representa en una gráfica el tiempo de simulación frente al tamaño de malla, podrán sacarse algunas conclusiones.

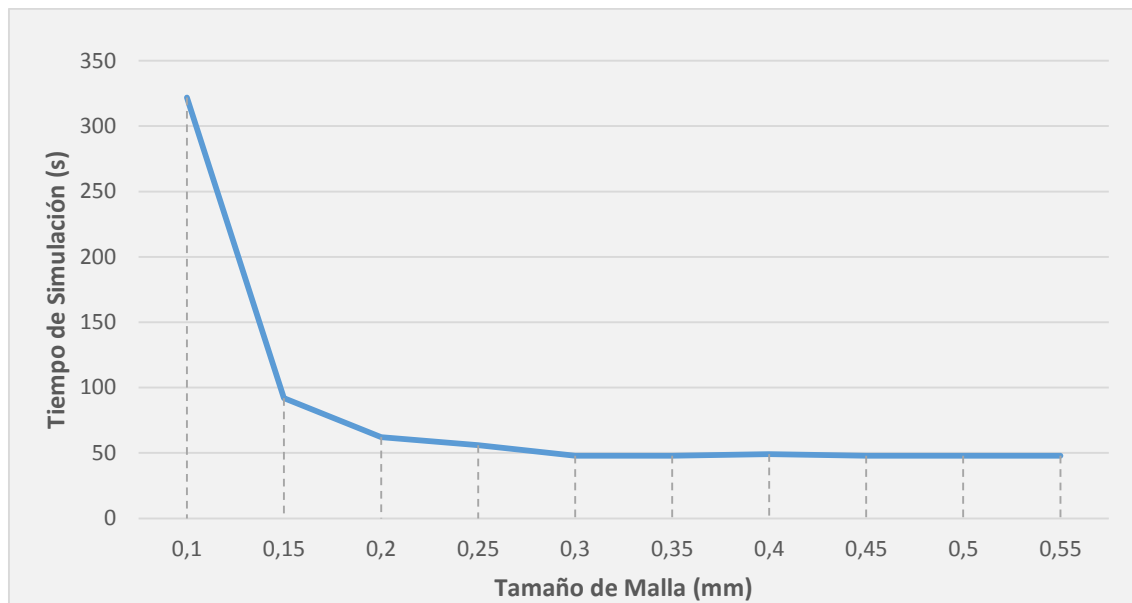


Figura 42 Gráfica que muestra la variación del tiempo de simulación empleado en el análisis del modelo, frente al tamaño de malla definido.

Si comparamos esta gráfica con la que realizamos anteriormente, que representaba el módulo de elasticidad frente al tamaño de malla, observamos que el comportamiento es exactamente el mismo, pero en esta ocasión, en vez de incrementarse, el tiempo de simulación disminuye bruscamente, de forma exponencial, hasta que se estabiliza para un tamaño de malla de 0,25 mm, como ocurría anteriormente.

Se observa, por tanto, que el tiempo de simulación y la precisión en los resultados están directamente relacionados, y como gracias a este análisis de sensibilidad hemos conseguido disminuir el tiempo de análisis de más de 300 segundos a apenas 50, tan sólo asumiendo un error del 1 % frente al resultado establecido como el más preciso.

3.5.2. Sensibilidad respecto al tamaño del RVE.

Como una primera aproximación, y para poder realizar el análisis de sensibilidad de la malla, anteriormente se justificó el uso de un tamaño del lado del RVE de 2,4 mm.

Llegados a este punto, y siguiendo la misma filosofía de intentar obtener la mayor precisión posible en los resultados, se realiza un estudio para observar cómo varía el módulo de elasticidad global frente a distintos tamaños del RVE, lo que permitirá determinar el tamaño óptimo que se debe emplear.

Para no alejarse mucho del valor que se ha obtenido inicialmente en base a la literatura, se analizarán casos que van desde un tamaño de 1 mm a 3,6 mm, en incrementos de 0,2 mm. Todos ellos se realizarán para un modelo con la misma porosidad, 30 %, y un mismo diámetro de esferas, cuyo valor se definió en el apartado correspondiente.

Al igual que en el análisis de sensibilidad de la malla, se realizará una gráfica para observar cómo varía el módulo de elasticidad en los diversos casos, y esa gráfica es la que se muestra a continuación.

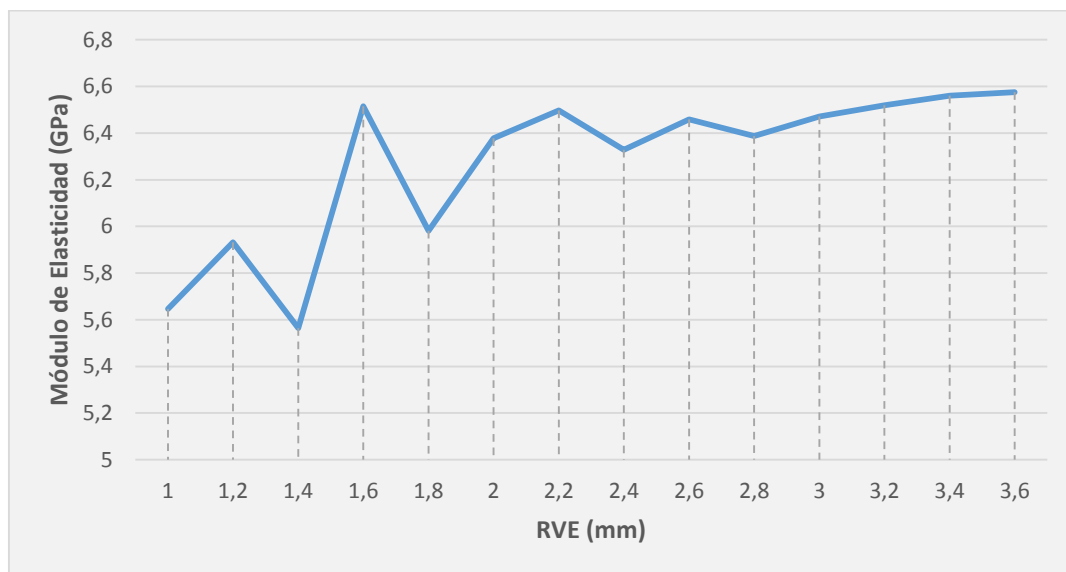


Figura 43 Gráfica que muestra la variación del Módulo de elasticidad del modelo frente al tamaño del lado del RVE.

Como puede observarse, para valores del lado pequeños, entre 1 y 2 mm, se produce una gran oscilación en los resultados. Es a partir de los 2 mm donde el valor del módulo de elasticidad global comienza a estabilizarse, y por tanto, a partir de ese valor se encuentra la zona de mayor interés.

Al escoger un valor para el lado del RVE mayor que 2 mm, se está asegurando que el RVE será lo bastante representativo como para poder extrapolar los resultados a cualquier hueso que presente esta estructura, ya que se observa que a partir de ahí la gráfica puede aproximarse a una recta con un error pequeño.

Como se había empezado asignando un valor de 2,4 mm al lado del RVE, y puesto que a la vista del análisis de sensibilidad este puede ser un valor perfectamente válido para realizar un estudio con precisión, éste será el valor empleado.



CAPÍTULO 4

PROBLEMA A RESOLVER

Como se ha venido comentando a lo largo de la memoria, el objetivo principal de este proyecto es el estudio del comportamiento de distintas propiedades mecánicas del hueso trabecular frente a la variación en su porosidad, intentando establecer una expresión matemática que describa lo más aproximadamente posible esa relación.

Para poder llevar esto a cabo, se ha generado un script en lenguaje Python que permite automatizar el proceso de creación de un modelo tridimensional que represente un RVE de la estructura trabecular y su análisis, todo ello empleando el programa de análisis por elementos finitos Abaqus/CAE. Tan sólo se nos requerirá la porosidad deseada, a través de una ventana que aparecerá en el programa nada más ejecutar el script.

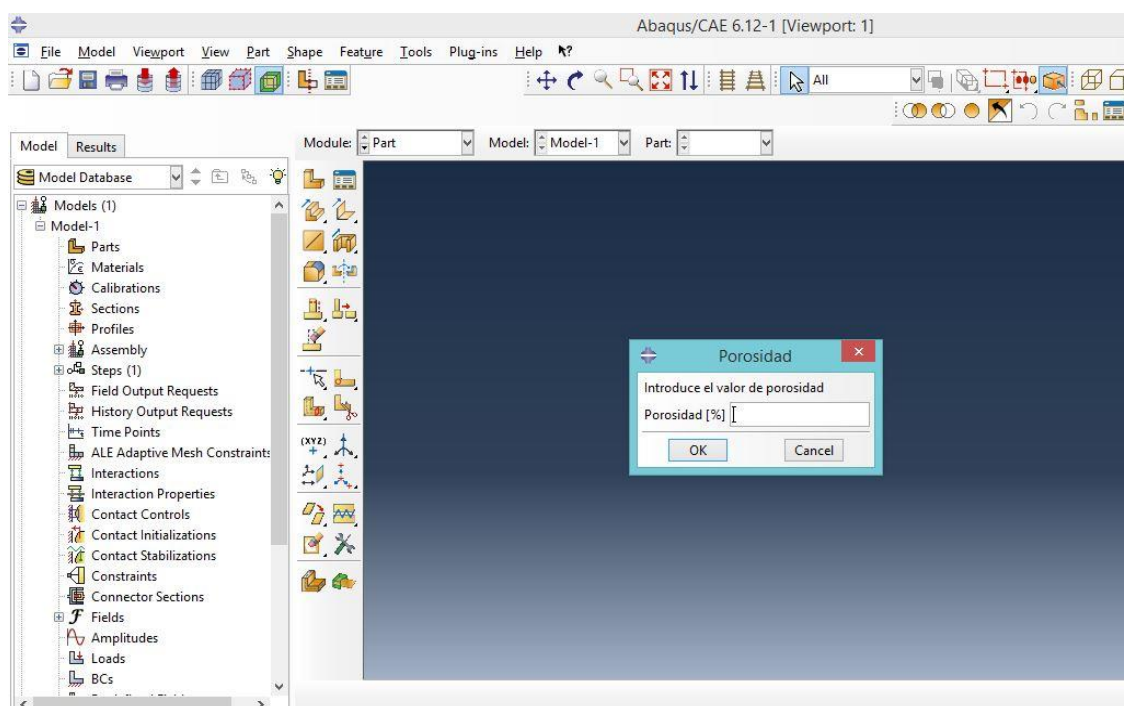


Figura 44 Ventana generada automáticamente en Abaqus/CAE para introducir la porosidad deseada en el modelo.

La automatización será muy importante, ya que permite ahorrar gran cantidad de tiempo cada vez que se desea lanzar un caso nuevo.

Las dimensiones del RVE han sido fijadas por defecto, tras haber realizado el análisis de sensibilidad pertinente, siendo el lado de éste igual a 2,4 mm, y el diámetro de las esferas que representan los poros igual a 0,6 mm.

Por otra parte, en apartados anteriores se han establecido las propiedades del material óseo que forma las trabéculas, siendo:

Densidad	1770 kg/m ³
Módulo de Elasticidad	13 GPa
Coefficiente de Poisson	0,3

Tabla 3 Propiedades del material óseo que constituye las trabéculas. [26, 27]

La estructura generada ha sido sometida a una serie de condiciones de contorno, cuya aplicación también está automatizada, y que a pesar de haber sido explicadas anteriormente, en resumen serán:

- **Empotramiento.**

Se establece un punto del modelo en el que los desplazamientos y los giros estén impedidos en cualquiera de las direcciones. Esto es a lo que Abaqus/CAE denomina “encastre”, y permitirá que el RVE quede fijado y no disponga de libertad de movimientos, al anular todos los grados de libertad. Esto, además, permitirá que se puedan aplicar unas condiciones de contorno similares a las condiciones de contorno periódicas.

El punto en cuestión se situará en el centro de una de las caras de cubo, como puede verse en la siguiente imagen.

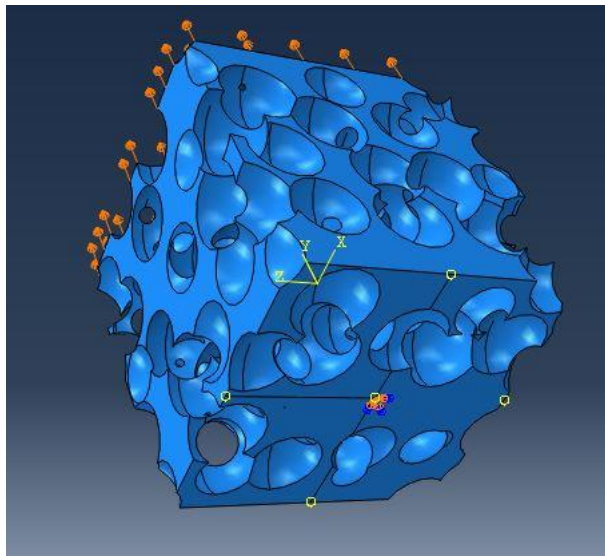


Figura 45 Empotramiento aplicado sobre el RVE empleado en el proyecto.

- **Desplazamiento.**

En la cara opuesta al “encastre” se fija un desplazamiento positivo en toda la superficie, de modo que el RVE se encuentre sometido a tracción.

El valor de dicho desplazamiento será proporcional al tamaño de arista del RVE, siendo un 10% del valor de ésta.

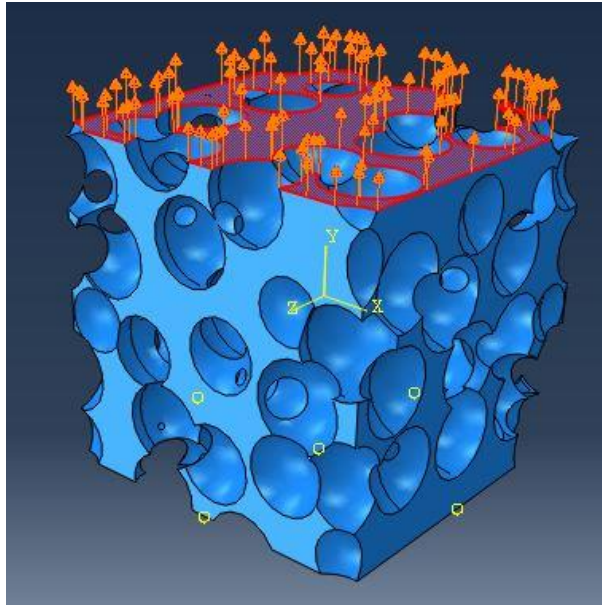


Figura 46 Desplazamiento aplicado sobre la cara superior del RVE empleado en el proyecto.

Con la medida de la arista del RVE estimada anteriormente, el valor del desplazamiento será:

$$\text{Desplazamiento} = 2,4 * 0,1 = 0,24 \text{ mm}$$

- **Restricción de desplazamiento.**

Una vez aplicado el desplazamiento en la cara superior, y empotrado el cubo en el punto central de la inferior, es necesario restringir la cara inferior para que al traccionar el cubo no se despegue del plano horizontal, sino que la tracción provoque únicamente un desplazamiento en las direcciones perpendiculares al sentido de la misma, provocando una reducción de área, como ocurriría en la realidad si se realizase el ensayo.

Para conseguir esto, se realizarán los mismos pasos que se hicieron para establecer el desplazamiento en el punto anterior, pero en esta ocasión, fijando un desplazamiento cero en la cara inferior para la misma dirección.

Al no especificarse nada más, el resto de direcciones dispondrán de libertad de movimientos.

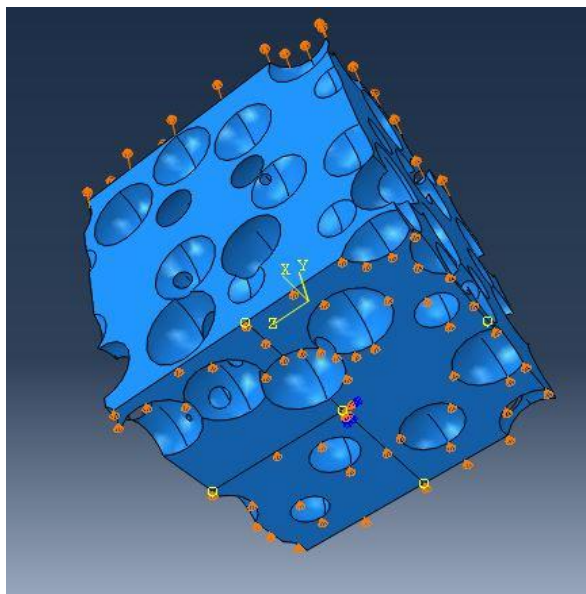


Figura 47 Restricción de desplazamiento aplicada sobre la cara inferior del RVE empleado en el proyecto.

Estas condiciones de contorno nos permitirán obtener el Módulo de elasticidad (E) y el Coeficiente de Poisson del modelo, sin embargo, será necesario efectuar manualmente en Abaqus/CAE una pequeña modificación para hallar el Módulo de cizalla (G), tal y como se explicará posteriormente.

El tamaño de malla para realizar el análisis se estableció anteriormente, tras justificarse su elección mediante un análisis de sensibilidad, siendo el valor de éste 0,2 mm.

Una vez conocido todo lo que se ha establecido por defecto en el modelo con el script, e introducido el valor de la porosidad deseada para el estudio, Abaqus/CAE ejecutará el análisis sobre el mismo por medio de elementos finitos.

Tras finalizar este análisis, el programa nos proporciona datos del modelo como la tensión de Von Mises o desplazamientos en distintos puntos, aunque no nos ofrecerá directamente el valor del Módulo de elasticidad, Módulo de cizalla o Coeficiente de Poisson. Por ello, es necesario realizar una serie de operaciones para poder calcularlos, y éstas se explicarán a continuación.

– **Módulo de elasticidad (E).**

Al suponer que el modelo planteado se trata de un sólido elástico lineal e isótropo, ésta última propiedad sólo sería cierta a escala microscópica, pues la distribución aleatoria de las oquedades en la estructura genera anisotropía, las tensiones y deformaciones que aparezcan en él en una misma dirección, cuando se produce una variación en el volumen del cuerpo, como consecuencia de las condiciones de contorno que se le han aplicado, estarán relacionadas linealmente siguiendo la Ley de Hooke:

$$\sigma = E * \varepsilon$$

Donde:

- σ = tensión que aparece en la superficie inferior del RVE, como consecuencia de la reacción originada al impedir los movimientos de la misma en dirección de la aplicación del desplazamiento. $\left[\frac{N}{m^2}\right] = [Pa]$
- E = módulo de elasticidad global de la estructura trabecular. $\left[\frac{N}{m^2}\right] = [Pa]$
- ε = deformación unitaria en el sólido como consecuencia de las condiciones de contorno aplicadas.

Por tanto, si se quiere hallar el módulo de elasticidad, se debe antes calcular la tensión (σ) y la deformación (ε).

Por un lado, se conoce que la deformación es un concepto que surge cuando sobre un cuerpo se aplican cargas axiales de tracción o compresión, siendo éste:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Donde:

- ΔL = variación de longitud, o desplazamiento, en la dirección de la aplicación de la carga. En este caso no se aplicará ninguna carga, sino que directamente se ha introducido un desplazamiento de valor igual al 10 % del lado del RVE. $[m]$
- L = longitud inicial del cubo en la dirección de aplicación del desplazamiento, esto es, el valor del lado del RVE. $[m]$

Conociendo los parámetros anteriores, puede hallarse el valor de la deformación:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,1 * L}{L} = 0,1$$

Ya solo queda obtener el valor de la tensión, que es una medida que indica la fuerza que actúa por unidad de superficie. En este caso, será la tensión que aparece en la superficie inferior del RVE, y que se calculará como:

$$\sigma = \frac{R}{A}$$

Donde:

- R = reacción originada en la superficie inferior del RVE al impedir los movimientos de la misma en dirección de la aplicación del desplazamiento. $[N]$
- A = área de la superficie inferior del cubo, esto es, el lado al cuadrado. $[m^2]$

Abaqus/CAE sí que proporcionará el valor de la reacción (R) tras realizar el análisis, por lo que se podrá calcular la tensión.

Una vez que se tiene la tensión y la deformación, mediante la expresión de la Ley de Hooke, que se vio anteriormente, puede obtenerse el valor del Módulo de elasticidad global (E).

- Módulo de cizalla (G).

Mientras que el Módulo de elasticidad (E) relacionaba la tensión con la deformación del sólido elástico lineal en una misma dirección, produciéndose una variación en el volumen del cuerpo, el Módulo de cizalla (G) establece esta misma relación en los casos en los que el elemento no sufre cambios en su volumen sino en su forma.

Para conseguir que esto último suceda, sobre el mismo modelo generado anteriormente para hallar el Módulo de elasticidad (E) se sustituirá manualmente, a través de GUI, el desplazamiento aplicado en la cara superior por otro del mismo valor, en la misma cara, pero en dirección horizontal. Además, se modificará el punto de encastre de la superficie inferior por un encastre en toda la superficie, eliminando la restricción de desplazamiento que se creó. De esta forma, al aplicar el desplazamiento, puesto que la cara paralela permanece encastrada, éste se traducirá en una deformación angular que afectará a la forma del sólido.

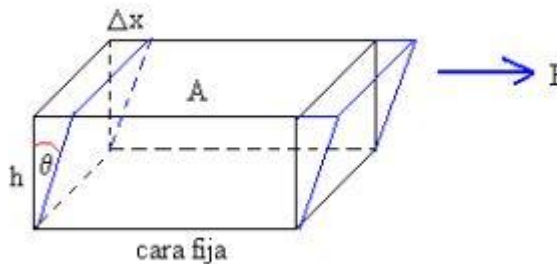


Figura 48 Ensayo empleado para obtener el Módulo de cizalla (G).

La relación que se establece, en este caso, entre tensión y deformación, será:

$$\sigma = G * \theta$$

Donde:

- σ = tensión que aparece en la superficie superior del RVE, en dirección y sentido del desplazamiento, como consecuencia de la aplicación de éste.
 $\left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$
- G = módulo de cizalla global de la estructura trabecular. $\left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$
- θ = deformación angular en el sólido como consecuencia de las condiciones de contorno aplicadas.

En este caso, asumiendo pequeña la deformación angular (θ), ésta podrá obtenerse como:

$$\theta \approx \tan(\theta) = \frac{\Delta x}{h}$$

Donde:

- Δx = variación de longitud, o desplazamiento, en la dirección de la aplicación de la carga. En este caso no se aplicará ninguna carga, sino que directamente se ha introducido un desplazamiento de valor igual al 10 % del lado del RVE. $[m]$
- h = longitud inicial del cubo en la dirección perpendicular a la aplicación del desplazamiento, esto es, el valor del lado del RVE. $[m]$

La tensión (σ) se calculará de la misma forma que se hizo anteriormente, teniendo en este caso en cuenta la resultante de las fuerzas horizontales, pudiendo obtener el Módulo de cizalla (G) mediante la expresión que se ha planteado inicialmente.

- **Coefficiente de Poisson (ν)**

Esta constante elástica ofrece una medida relativa del desplazamiento en las direcciones perpendiculares cuando se somete al sólido elástico lineal e isótropo a un desplazamiento en dirección longitudinal, permitiendo que éste altere su volumen.

Aunque la distribución aleatoria de las oquedades en la estructura genere anisotropía, como ya se comentó anteriormente, se seguirá teniendo en cuenta el

modelo como si fuese isótropo, lo que simplificará la forma en la que se obtiene este coeficiente.

Para determinar su valor, se empleará el mismo modelo que se generó para hallar el Módulo de elasticidad (E), pero en este caso, tras realizar el análisis, se harán unos cálculos distintos.

El Coeficiente de Poisson puede expresarse como:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}}$$

Donde:

- ε_{trans} = deformación unitaria en el sólido, en dirección transversal, como consecuencia de las condiciones de contorno aplicadas.
- ε_{long} = deformación unitaria en el sólido, en dirección longitudinal, como consecuencia de las condiciones de contorno aplicadas.

Del mismo modo que se hizo con anterioridad, puede obtener el valor de la deformación en dirección longitudinal fácilmente (ε_{long}). En este caso, la dificultad está en obtener la deformación en dirección transversal (ε_{trans}). Para ello:

$$\varepsilon_{trans} = \frac{\Delta L_{trans}}{L}$$

Donde:

- ΔL_{trans} = diferencia entre la distancia media entre distintos pares de puntos que se encuentran en caras transversales opuestas, siempre en la misma horizontal, y la longitud transversal inicial. Abaqus/CAE permitirá realizar las medidas de distancia sobre el modelo. [m]
- L = longitud transversal inicial del modelo. Puesto que se trata de un cubo, se trata de la medida del lado establecido inicialmente. [m]

Con esto, ya podrá calcularse el Coeficiente de Poisson (ν)

Ahora bien, para observar como varían estas constantes elásticas en función de la porosidad, se obtendrá el valor de éstas en un rango de porosidades entre 0 % y 55 %, en incrementos del 5 % de porosidad, realizando tres análisis, o pruebas, con modelos distintos para cada caso de porosidad, lo que permitirá acotar mejor el error.

La razón por la que el rango de porosidades finaliza en 55 % es que, para porosidades mayores, Abaqus/CAE encuentra geometrías complejas que no es capaz de mallar, causadas por la constante superposición de las esferas que simulan los poros, por lo que no puede realizarse el análisis por elementos finitos.

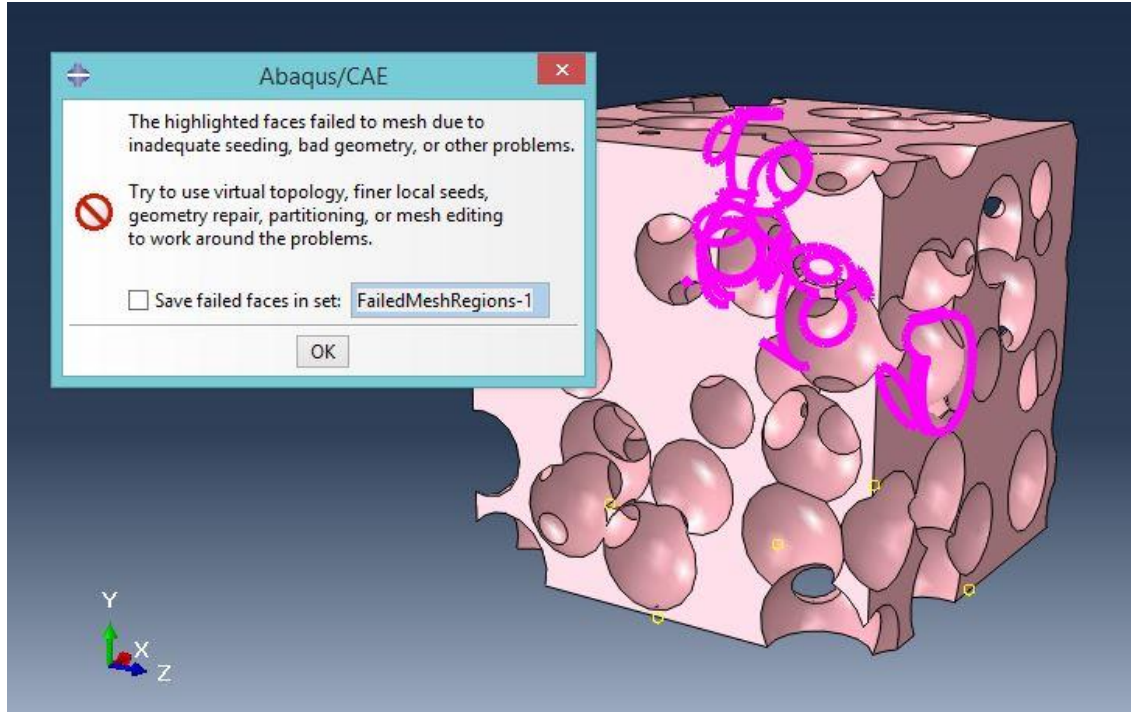


Figura 49 Aviso de error en el mallado generado por Abaqus/CAE.

Se ha probado a emplear tamaños de malla más pequeños en el modelo, incluso a mallar parcialmente la zona problemática empleando otros elementos, pero nada de esto ha conseguido que el error desaparezca.

Hasta 55 %, el problema aparece en algunos modelos generados, pero tras varios intentos es posible obtener un modelo que el programa sea capaz de mallar correctamente.

En cualquier caso, el rango escogido permitirá establecer de forma bastante precisa la relación entre el módulo de elasticidad del hueso trabecular en función de su porosidad, en la franja que va hasta el 55 % de porosidad, y posibilitará la estimación de cuál pueda ser la tendencia que presente para porosidades superiores.



CAPÍTULO 5 **RESULTADOS**

Una vez fijados los problemas a resolver, en el capítulo anterior, se mostrarán los resultados obtenidos al estudiar los valores de las distintas constantes elásticas, que anteriormente se definieron, en modelos con diferente porosidad que representan la estructura ósea trabecular.

5.1. Módulo de elasticidad (E).

Siguiendo los pasos descritos en el capítulo previo, se han obtenido los siguientes valores del Módulo de elasticidad global (E) del hueso trabecular en función de su porosidad, realizando tres pruebas con tres modelos distintos para cada porosidad.

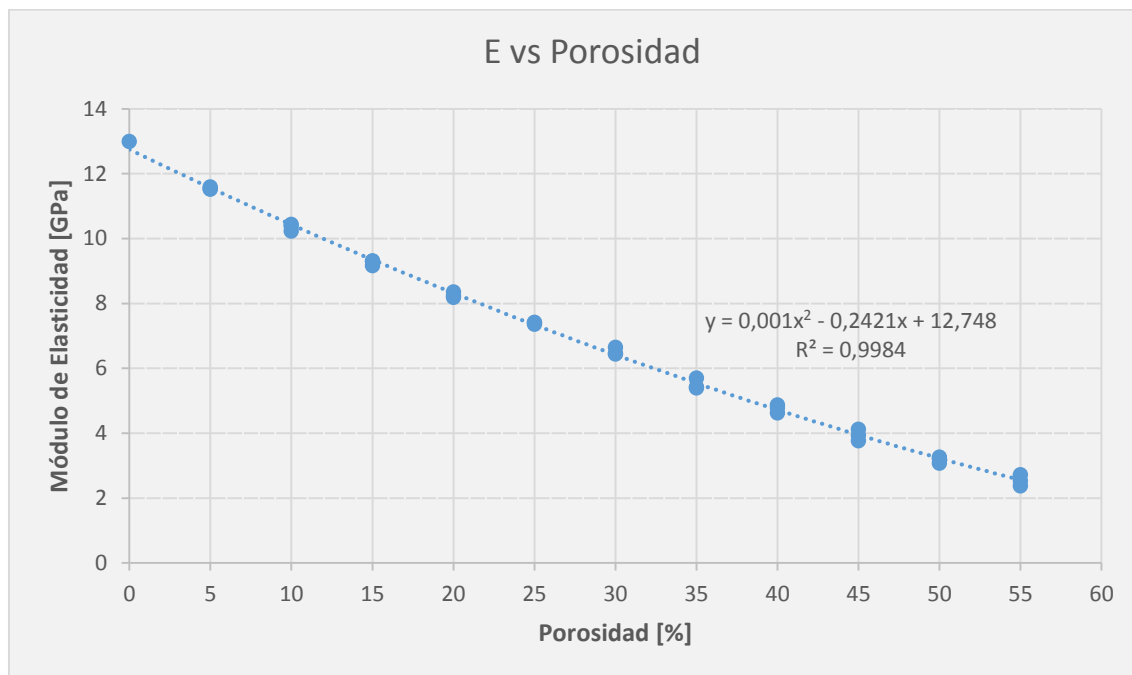


Figura 50 Gráfica que muestra la variación del Módulo de elasticidad (E), del RVE empleado en el proyecto para representar la estructura trabecular, en función de la porosidad de la misma.

Como puede verse, en el caso de porosidad nula, el Módulo de elasticidad coincide con el Módulo de elasticidad fijado para el material que forma las trabéculas. Conforme aumenta la porosidad, se observa que la disminución en el Módulo de elasticidad se va ralentizando, si bien esto sucede de forma muy suave.

Tras probar con diversas funciones, se ha llegado a la conclusión de que la función que mejor se ajusta a la tendencia de los datos es una función polinómica de segundo grado, cuya ecuación es calculada en Excel, así como su error cuadrático.

$$y = 0,001x^2 - 0,2421x + 12,748$$

$$R^2 = 0,9984$$

A continuación se muestran unas imágenes en las que pueden observarse las tensiones, deformaciones y desplazamientos que ha sufrido uno de los modelos tras el análisis realizado en Abaqus/CAE para obtener el Módulo de elasticidad (E).

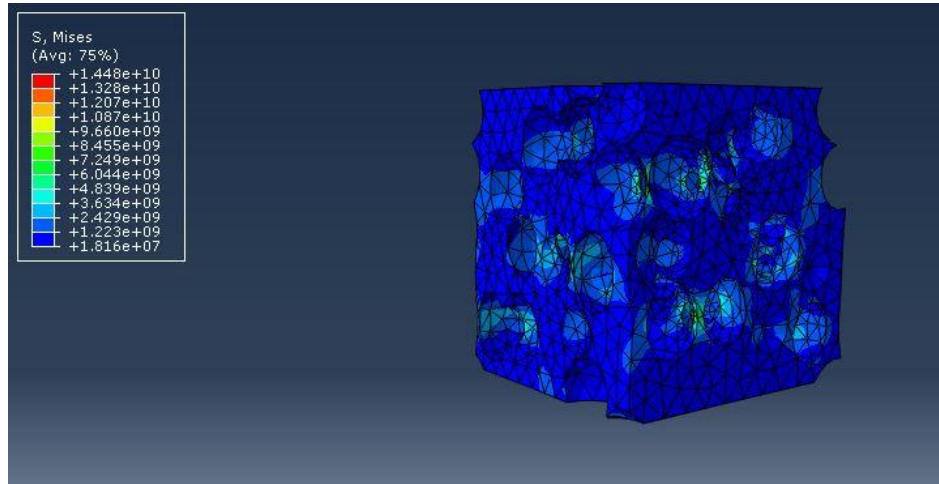


Figura 51 Tensión de Von Mises en un modelo empleado para obtener E, con el 50 % de porosidad.

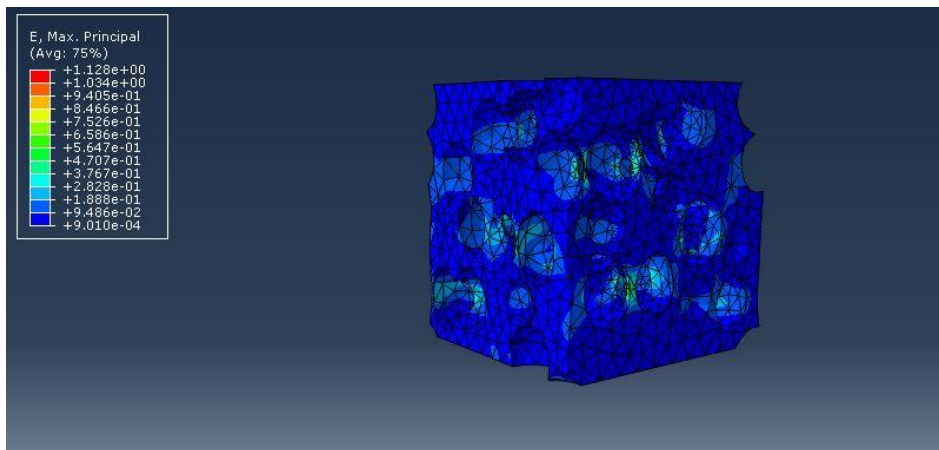


Figura 52 Deformación máxima principal en un modelo empleado para obtener E, con el 50 % de porosidad.

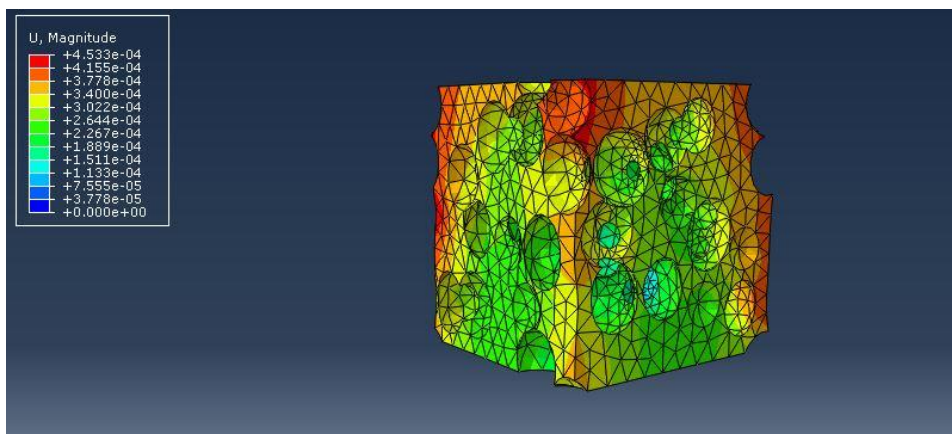


Figura 53 Desplazamiento en un modelo empleado para obtener E, con el 50 % de porosidad.

5.2. Módulo de cizalla (G).

Empleando los mismos modelos que en el caso anterior, únicamente modificando las condiciones de contorno, tal y como se explicó en el capítulo previo, se obtienen los siguientes resultados:

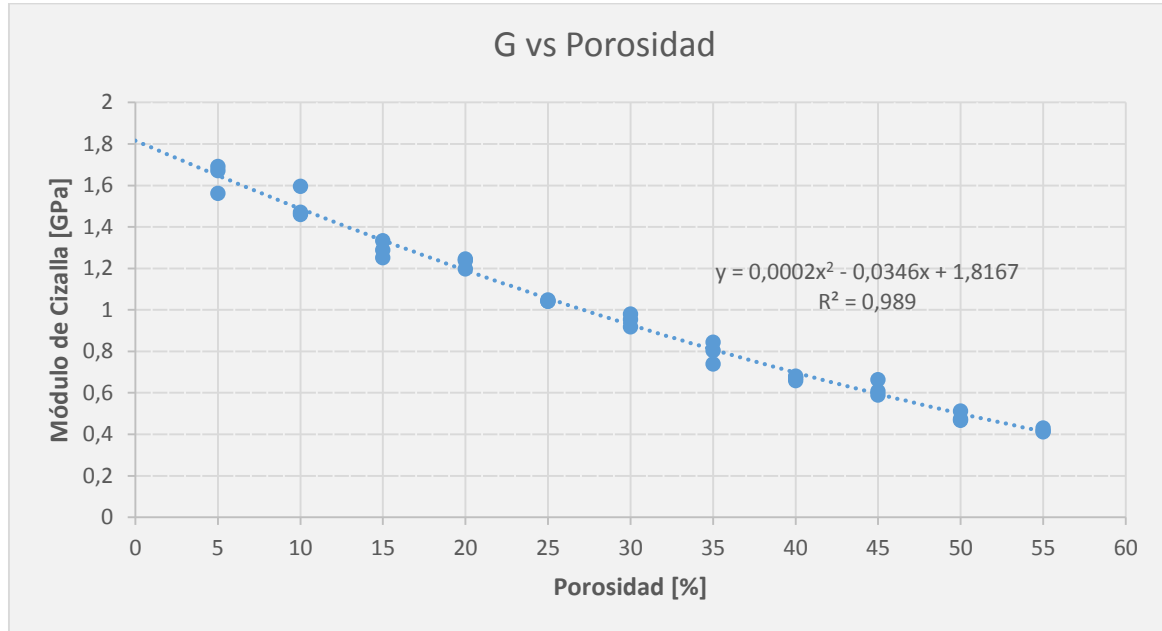


Figura 54 Gráfica que muestra la variación del Módulo de cizalla (G), del RVE empleado en el proyecto para representar la estructura trabecular, en función de la porosidad de la misma.

Al igual que con el Módulo de elasticidad (E), la tendencia decreciente en los resultados se aproxima a una ecuación polinómica de segundo grado, donde el error cuadrático se aproxima menos a la unidad.

$$y = 0,0002x^2 - 0,0346x + 1,8167$$

$$R^2 = 0.989$$

Tanto en el caso del Módulo de elasticidad (E) frente a la porosidad como en este, las líneas de tendencia son muy similares, lo que nos lleva a pensar que la disminución de ambas constantes elásticas con la porosidad es prácticamente proporcional.

A continuación se muestran unas imágenes en las que pueden observarse las tensiones, deformaciones y desplazamientos que ha sufrido uno de los modelos tras el análisis realizado en Abaqus/CAE para obtener el Módulo de cizalla (G).

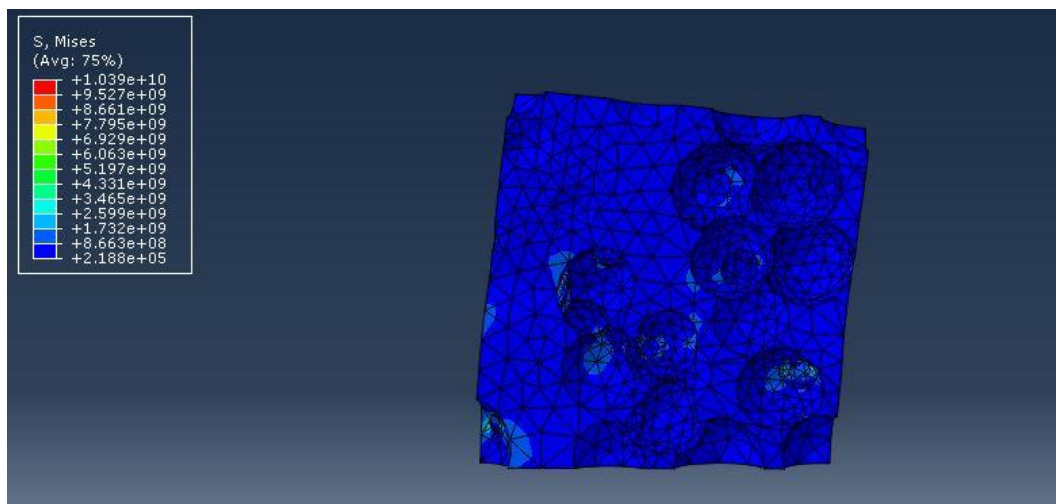


Figura 55 Tensión de Von Mises en un modelo empleado para obtener G, con el 50 % de porosidad.

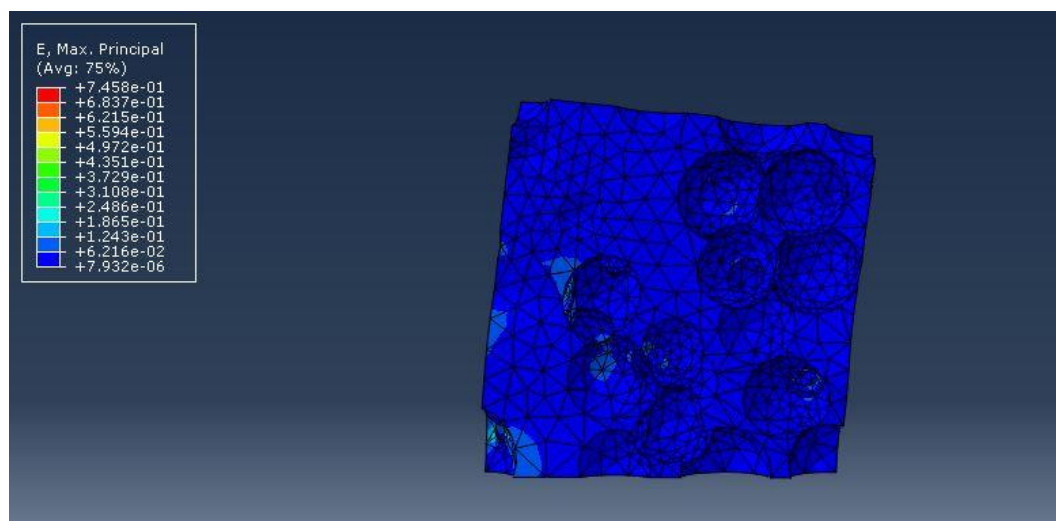


Figura 56 Deformación máxima principal en un modelo empleado para obtener G, con el 50 % de porosidad.

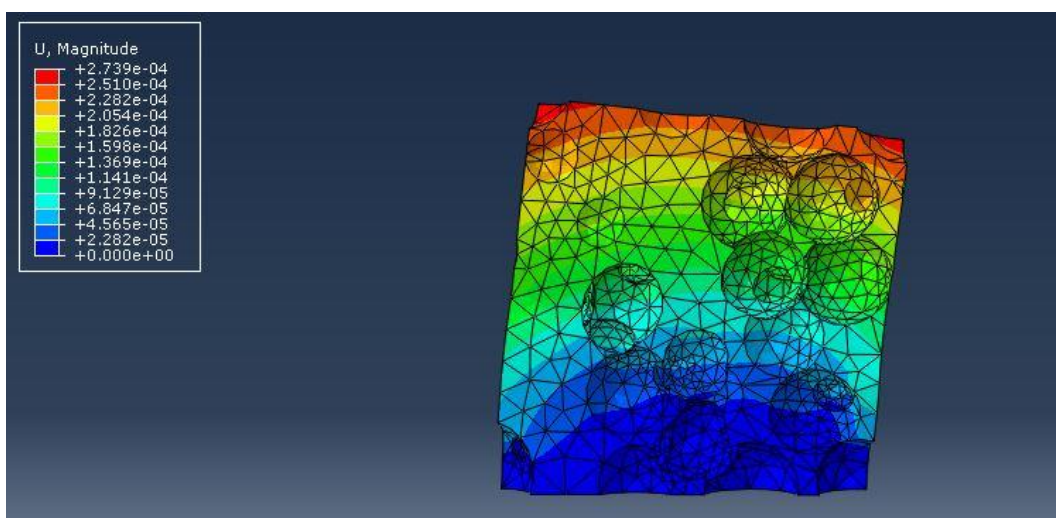


Figura 57 Desplazamiento en un modelo empleado para obtener G, con el 50 % de porosidad.

5.3. Coeficiente de Poisson (ν).

La variación de este parámetro frente a la porosidad es la que se muestra a continuación:

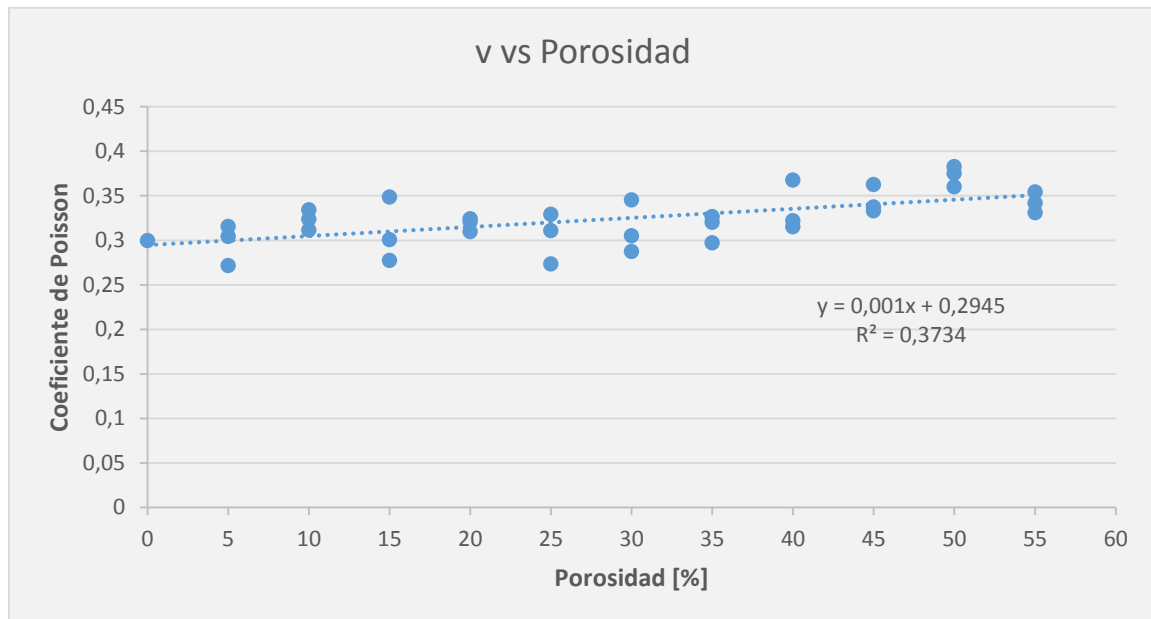


Figura 58 Gráfica que muestra la variación del Coeficiente de Poisson (ν), del RVE empleado en el proyecto para representar la estructura trabecular, en función de la porosidad de la misma.

En este caso, puede observarse que la línea de tendencia nos es tan clara como en los anteriores. Conforme la porosidad va aumentando, se puede apreciar un ligero incremento en el valor de este coeficiente, que varía en 0,5 unidades desde el 0 % hasta el 55 % de porosidad, si bien el error en la estimación de la tendencia es bastante elevado.

La tendencia se ha aproximado a una recta en este caso, ya que es la que ofrece la mejor aproximación.

$$y = 0,001x + 0,2945$$

$$R^2 = 0,3734$$



CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

6.1. Conclusiones.

De forma general, las conclusiones que se han obtenido tras la elaboración del trabajo son las siguientes:

- Se ha conseguido desarrollar, con éxito, un script escrito en lenguaje de programación Python que permite crear modelos en Abaqus/CAE, de forma totalmente automática, que representan RVE's de la estructura ósea trabecular. Además, este script da la opción al usuario de poder escoger la porosidad deseada en el modelo, y en él se pueden ajustar los parámetros geométricos del RVE y de la malla que se le aplica.
- Con el modelo generado en Abaqus/CAE, y empleando el Método de los Elementos Finitos, se han obtenido las principales propiedades mecánicas de la estructura ósea trabecular (Módulo de elasticidad, Módulo de cizalla y Coeficiente de Poisson), siendo propiedades complejas de calcular mediante ensayos experimentales.
- Como era obvio, se ha podido demostrar que el Módulo de elasticidad (E) y el Módulo de cizalla (G) disminuyen con la porosidad. Se ha observado que ésta disminución es muy severa, y es por ello que el aumento de la porosidad en el hueso trabecular, como consecuencia de desórdenes metabólicos óseos como la osteoporosis, lleva a que los pacientes que sufren este tipo de enfermedades a ser más propensos a las fracturas óseas.
- En cuanto al Coeficiente de Poisson (ν), se ha observado como éste aumenta a medida que lo hace la porosidad. Sin embargo, el aumento es muy leve y hay una gran variabilidad en los resultados obtenidos con los modelos con los que se ha trabajado.

6.2. Trabajos futuros.

Una vez expuestas las conclusiones, se plantean una serie de ideas que han ido surgiendo durante el desarrollo del proyecto, y que pueden servir para elaborar futuros trabajos.

- Sin duda, el principal reto que se plantea al haber finalizado este proyecto es conseguir un modelo que permita representar RVE's de la estructura ósea trabecular con porosidades mayores. Actualmente, sólo se han conseguido generar modelos con hasta el 55 % de porosidad, incluida, debido a los continuos errores generados por el programa Abaqus/CAE al intentar mallar estructuras con mayor porosidad.

Si bien una solución posible es elaborar los modelos de forma distinta, puede estudiarse la utilización de otros programas específicos, en lugar de Abaqus/CAE, para realizar el mallado que permita emplear el Método de los Elementos Finitos.

- Otra de las propuestas de trabajo futuro que surgen, es la elaboración de un modelo en el que se empleen elipses en lugar de esferas para simular las oquedades propias de la estructura ósea trabecular y modificar su porosidad. Al introducir elipses, puede estudiarse la influencia de la orientación de las mismas en las propiedades mecánicas de la estructura.
- Por último, una de las cosas que más cabe destacar es que se ha empleado la hipótesis de un modelo elástico, lineal e isótropo para estudiar el comportamiento con la porosidad de las principales propiedades mecánicas del hueso trabecular. Sin embargo, como ya se explicó anteriormente, la afirmación de que el modelo es isótropo solamente sería cierta a escala microscópica, pues la introducción de oquedades de forma aleatoria genera anisotropía, es decir, las constantes elásticas variarán en función de la dirección que se estudie.

Por otra parte, existen modelos, como el viscoelástico, que podrían ajustarse mejor al comportamiento real de esta estructura.

Asumir estas distintas hipótesis sobre el modelo es, por tanto, algo que deba realizarse si se quieren obtener resultados más precisos acerca del comportamiento de las principales propiedades mecánicas del mismo con la porosidad.



CAPÍTULO 7

PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO

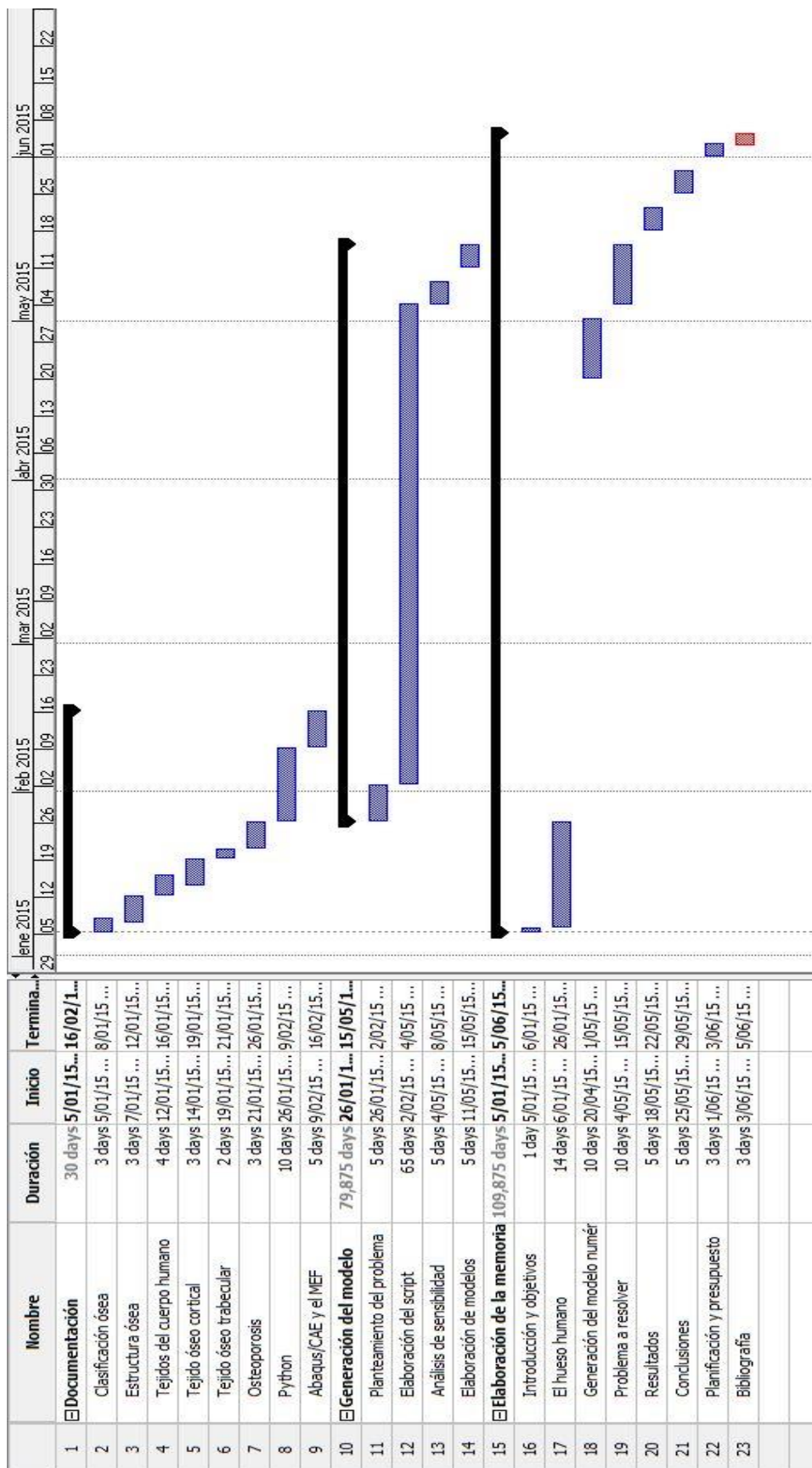
7.1. Planificación.

En el ámbito ingenieril, una buena definición de las tareas a realizar y su duración, es fundamental para poder establecer plazos de entrega razonables. En muchos casos, la superación de estos plazos conlleva costes adicionales y penalizaciones, por lo que este apartado es de gran importancia en todo proyecto.

Para llevar a cabo la planificación de este proyecto, se ha empleado el programa informático Open Project, similar a Microsoft Project, pero que cuenta con una gran ventaja: es gratuito.

En esta ocasión, la planificación se ha realizado una vez realizado el proyecto, por lo que las fechas y duraciones de las tareas que se representan a continuación, en el diagrama de Gantt, son las reales. La fecha de inicio ha sido el 05/01/2015 y la de fin el 05/06/2015, por lo que, sin contar con los festivos nacionales y de la Comunidad de Madrid, así como fines de semana, se han empleado 104 días, dedicándose 3 horas al día de media.

Prácticamente, se han realizado tres grandes grupos de tareas en paralelo: documentación, generación del modelo y elaboración de la memoria. Se observa que la tarea de mayor duración es la elaboración del script, 65 días, siendo la pieza central del trabajo.



7.2. Presupuesto.

Para la realización de este punto, se han tenido en cuenta los costes del equipo empleado (hardware), los costes de las licencias de programa (software) y los costes derivados de las horas de trabajo de las personas que han participado en el proyecto.

Coste Personal				
	Profesión	Nº horas empleadas	Coste horario (€/h)	Coste total (€)
Tutor	Ingeniero	50	40	2.000
Alumno	Estudiante	312	20	6.240
Coste Software				
	Precio (€)	Periodo usado (meses)	Periodo amortización	Coste total (€)
Abaqus/CAE	6.000	6	24	1.500
MS Office	120	6	24	30
Coste Hardware				
	Precio (€)	Periodo usado (meses)	Periodo amortización	Coste total (€)
HP-15-r111ns	600	6	24	150
Coste Personal + Coste Software + Coste Hardware =				9.920

Para la amortización las herramientas empleadas, se ha supuesto un índice de utilización del 100 %, utilizando la siguiente expresión para calcular los costes de cada elemento:

$$Coste = \frac{Periodo\ usado}{Periodo\ de\ amortización} * Precio$$



CAPÍTULO 8 **BIBLIOGRAFÍA**

- [1] ALDO A., LIZANA P. Introducción a la anatomía humana [en línea]. Universidad Católica de Valparaíso, 2012. Anatomía humana I. [Consulta: 08-01-2015]. Disponible en:
<http://www.anatomiahumana.ucv.cl/kine1/Modulos2012/INTRODUCCION%20LOCO%20MOTOR%20kine%202012.pdf>
- [2] GARTNER L.P., HIATT J.L. Histología Básica. Barcelona: Elsevier, 2011. 352 p. ISBN: 978-84-8086-868-6.
- [3] ROSS M.H. Histología: texto y atlas color con biología celular y molecular. 4ª Edición. Panamericana, 2005. 924 p. ISBN: 978-95-0060-435-2.
- [4] CARRETERO M. Novedades en el tratamiento de la osteoporosis. En: Avances Farmacológicos [en línea]. Elsevier, 2002. V. 21, no. 10, pp. 168-172. [Consulta: 14-01-2015]. Disponible en:
http://www.dfarmacia.com/farma/ctl_servlet? f=37&id=13039724
- [5] Anatomía de los huesos. Sabelotodo [web]. [Consulta: 14-01-2015]. Disponible en:
<http://www.sabelotodo.org/anatomia/huesos.html>
- [6] BERNABÉ SALAZAR A., NAVARRO CÁMARA J.A., PALLARÉS MARTÍNEZ F.J. Tema 11. Tejido óseo [en línea]. Universidad de Murcia. Citología e histología veterinaria. [Consulta: 16-01-2015]. Disponible en: <http://ocw.um.es/cc.-de-la-salud/citologia-e-histologia-veterinaria/material-de-clase-1/tema11-tejido-oseo.pdf>
- [7] ALDO A., LIZANA P. Morfología ósea [en línea]. Universidad Católica de Valparaíso, 2012. Anatomía humana I. [Consulta: 16-01-2015]. Disponible en:
<http://www.anatomiahumana.ucv.cl/kine1/top2.html>
- [8] GUERCIO MÓNACO E. La osteoporosis. Sus efectos sobre la cavidad bucal. En: Acta Odontológica Venezolana [en línea]. Universidad Central de Venezuela, 1999. V. 37, no. 2. [Consulta: 26-01-2015]. Disponible en:
http://www.actaodontologica.com/ediciones/1999/2/osteoporosis_efectos_cavidad_bucal.asp
- [9] Osteoporosis. Scienceproject [web]. [Consulta: 26-01-2015]. Disponible en:
<http://www.scienceproject.com/projects/intro/intermediate/IB301.asp>

- [10] HOBECKER O., GUAYÁN V.A., MANGO VORRATH N.P., GIMÉNEZ S.L. Impacto de la osteoporosis sobre la población. En: Revista de Posgrado de la VIa Cátedra de Medicina [en línea]. Universidad Nacional del Nordeste, 2005. No. 144, pp. 24-27. [Consulta: 26-01-2015]. Disponible en: http://www.med.unne.edu.ar/revista/revista144/7_144.htm
- [11] Vertebroplastia. Clínica Neuros [web]. [Consulta: 26-01-2015]. Disponible en: <http://www.neuros.net/es/vertebroplastia.php>
- [12] RIGGS, B.L., MELTON, L.J. Osteoporosis: Etiology, Diagnosis and Management. New York: Raven Press, 1988.
- [13] WAYNE SAMPSON H. Alcohol and other factors affecting osteoporosis risk in women. En: The Journal of the National Institute on Alcohol Abuse and Alcoholism [en línea]. NIAAA, 2002. V. 26, no. 4, pp. 292-298. [Consulta: 26-01-2015]. Disponible en: <http://pubs.niaaa.nih.gov/publications/arh26-4/292-298.htm>
- [14] BIOSALUD. Dos millones y medio de mujeres padecen osteoporosis en España. En MedicaBlogs: comunidad médica de habla hispana [blog]. 21 octubre 2009. [Consulta: 26-01-2015]. Disponible en: <http://medicablogs.diariomedico.com/institutobiosalud/2009/10/21/dos-millones-y-medio-de-mujeres-padecen-osteoporosis-en-espana/>
- [15] CARNICERO A. Introducción al Método de los Elementos Finitos [en línea]. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas, 2003. Resistencia. [Consulta: 16-02-2015]. Disponible en: http://www.iit.upcomillas.es/~carnicero/Resistencia/Introduccion_al_MEF.pdf
- [16] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L. El Método de los Elementos Finitos. Formulación básica y problemas lineales. 4ª Edición. Barcelona: McGraw-Hill y CIMNE, 1993. 648 p. ISBN: 84-481-0177-4.
- [17] Abaqus FEA. Dassault Systems, 2014. [Consulta: 15-05-2015]. Disponible en: <http://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>

[18] LUKASZEWSKI A. What is Python? En: About.com [en línea]. [Consulta: 09-02-2015]. Disponible en: <http://python.about.com/od/gettingstarted/ss/whatispython.htm#step-heading>

[19] PURI G. Python Scripts for Abaqus. Learn by example. Montana: University of Montana, 2011. 725 p. ISBN: 978-0-615-52050-6.

[20] Dassault Systems. Abaqus 6.12 Scripting User's Manual. 2014.

[21] OVERVELDE J.T.B. Learn Abaqus script in one hour. En: overvelde.com [en línea]. [Consulta: 09-02-2015]. Disponible en: <http://www.overvelde.com/wp-content/uploads/2011/05/LearnAbaqusScriptInOneHour.pdf>

[22] LALEGNAME A., SFER D., ETSE G. Análisis micromecánico de huesos. En: Mecánica computacional [en línea]. S.R. Idhelsohn, V.E. Sonzogni and A. Cardona (Eds.), 2002. V. 21, pp. 2530-2538. [Consulta: 06-04-2015]. Disponible en: <http://amcaonline.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/1023/971>

[23] MIRANDA H.D., ANDRADE PIRES F.M., MARQUES A.T. Impact of the geometry of inclusions at the micro-scale on the overall stochastic properties. En: Mechanics of Advance Materials and Structures [en línea]. J.N Reddy (Ed.), 2014. [Consulta: 20-04-2015]. Disponible en: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15376494.2014.938792>

[24] DRUGAN W.J., WILLIS J.R. A micomechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volumen element size for elastic composites. En: J. Mech. Phys. Solids [en línea]. Elsevier, 1996. V. 44, no. 4, pp. 497-524. [Consulta: 22-04-2015]. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509696000075>

[25] FOLGADO J., FERNANDES P.R. Bone tissue mechanics [en línea]. Instituto Superior Técnico, 2011. Biomecánica de tejidos. [Consulta: 26-04-2015]. Disponible en: http://www2.dem.ist.utl.pt/~prfernan/biomedica/Aula_2011.03.10.pdf

[26] ASHMAN R.B., RHO J.Y. Elastic modulus of trabecular bone material. En: Journal of Biomechanics [en línea]. Elsevier, 1988. V. 21, no. 3, pp. 177-181. [Consulta: 28-04-2015]. Disponible en: [http://www.jbiomech.com/article/0021-9290\(88\)90167-4/abstract](http://www.jbiomech.com/article/0021-9290(88)90167-4/abstract)

[27] RAMÍREZ E.I., ORTIZ A., SHOUWENAARS R., RUIZ O. Modelado de hueso trabecular mediante paquetería de elemento finito basándose en estructuras de Voronoi. En: Ingeniería Mecánica. Tecnología y Desarrollo [en línea]. Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica, 2007. V. 2, no. 5, pp. 151-156. [Consulta: 02-05-2015]. Disponible en: http://www.revistasomim.net/revistas/2_5/artic2.pdf

[28] GITMAN I.M., ASKES H., SLUYS L.J. Representative volumen: existence and size determination. En: Engineering Fracture Mechanics [en línea]. Elsevier, 2007. V. 74, no. 16, pp. 2518-2534. [Consulta: 05-05-2015]. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794406004772>